

УДК 621.391.17

д-р техн. наук, проф. Єрохін В. Ф. ORCID: 0000-0001-7194-8577 (ВІТІ ім. Героїв Крут)  
канд. техн. наук, проф. Радзівілов Г. Д. ORCID: 0000-0002-6047-1897 (ВІТІ ім. Героїв Крут)  
Коваленко О. О. ORCID: 0009-0008-4087-8770 (ВІТІ ім. Героїв Крут)

## МЕТОДИКИ СИНТЕЗУ І РЕДУКЦІЇ ML-АЛГОРИТМУ РОЗДІЛЕННЯ-ДЕМОДУЛЯЦІЇ НЕРІВНОПОТУЖНИХ СИНХРОННИХ СИГНАЛІВ QPSK

У теорії багатокористувацького детектування цифрових сигналів (ЦС) найкращими за завадостійкістю є Maximum Likelihood (ML)-алгоритми, що передбачають формування апостеріорних імовірностей станів інформаційних групового і індивідуальних дискретних параметрів (ДП) кожного з користувачів. Відомі результати синтезу і аналізу завадостійкості ML-алгоритмів розділення-демодуляції взаємно неортогональних сигналів BPSK свідчать про їхню високу, потенційно досяжну завадостійкість і водночас про експоненціальну залежність їх складності від кількості і позиційності сигналів, що підлягають розділенню. На сьогодні вже одержані результати редукції (спрощень) таких алгоритмів до виду, прийнятного для практичних застосувань. Безумовний інтерес становлять відповіді на подальші питання про можливість подібних спрощень у випадках, коли взаємно неортогональні сигнали будуть складнішими, ніж двійкові.

Представлено результати синтезу і розглядається можливість технологічно прийнятних спрощень алгоритму розділення-демодуляції двох взаємно неортогональних сигналів QPSK, оптимального за критерієм мінімуму ймовірності помилки в оцінці інформаційних ДП кожного з індивідуальних користувачів. Досліджується можливість апроксимації аналітично складних гіперболічних передатних функцій компенсаційних трактів простими лінійно-ламаними. Запропонована структурна схема редукційованого алгоритму розділення-демодуляції двох взаємно неортогональних сигналів QPSK. Продемонстровано, що за забезпечення відміни в миттєвих потужностях між сигналами близько 9 дБ можна відмовитись від компенсації впливу менш потужного сигналу на більш потужний, що суттєво спрощує алгоритм розділення-демодуляції. Додаткове спрощення досягається відмовою від усунення опосередкованого зворотного впливу менш потужного сигналу через більш потужний. Запропоновані спрощення призводять до втрат в завадостійкості в межах 1–2,5 дБ, залежно від ступеня взаємної неортогональності.

**Ключові слова:** сигнали QPSK, взаємна неортогональність, ML-алгоритми розділення-демодуляції, редукція, апроксимація передатних функцій, імовірність помилки

### **V. Yerokhin, G. Radzivilov, O. Kovalenko. Method of synthesis and reduction of ML-algorithm for division-demodulation of unequal power synchronous QPSK signals**

In the theory of multi-user detection of digital signals (DS), the best in terms of noise immunity are Maximum Likelihood (ML) algorithms, which involve the formation of posterior probabilities of the states of information group and individual discrete parameters (DP) of each user. The known results of the synthesis and analysis of the noise immunity of ML algorithms for separation-demodulation of mutually non-orthogonal BPSK signals indicate their high, potentially achievable noise immunity and at the same time the exponential dependence of their complexity on the number and position of the signals to be separated. At present, the results of the reduction (simplification) of such algorithms to a form acceptable for practical applications have already been obtained. Of undoubted interest are the answers to further questions about the possibilities of such simplifications in cases where mutually non-orthogonal signals are more complex than binary ones.

The synthesis results are presented and the possibility of technologically acceptable simplifications of the algorithm for the separation-demodulation of two mutually non-orthogonal QPSK signals, optimal according to the criterion of minimum error probability in the estimation of information DPs of each individual user, is considered. The possibility of approximations of analytically complex hyperbolic transfer functions of compensation paths by simple linear-polygonal ones is investigated. A structural diagram of a reduced algorithm for the separation-demodulation of two mutually non-orthogonal QPSK signals is proposed. It is demonstrated that, while ensuring a cancellation in instantaneous powers between the signals of about 9 dB, it is possible to abandon the compensation of the influence of a less powerful signal on a more powerful one, which significantly simplifies the separation-demodulation algorithm. Additional simplification is achieved by abandoning the elimination of the mediated reverse influence of a less powerful signal through a more powerful one. The proposed simplifications lead to losses in noise immunity in the range of 1-2.5 dB, depending on the degree of mutual non-orthogonality.

**Keywords:** QPSK signals, mutual non-orthogonality, ML-algorithms of separation-demodulation, reduction, approximation of transfer functions, error probability.

**Вступ.** Відомо, що якщо в теорії багатокористувацького детектування (БКД) цифрових сигналів (ЦС) деякий алгоритм розділення-демодуляції будується за нормою Фробеніуса (НФ), він буде нечутливим до статистичних характеристик шуму за умови, що шум є гауссівським. Тобто, у цьому випадку мінімізація НФ буде еквівалентною максимізації апостеріорної імовірності стану спостереження, якщо стани інформаційних дискретних параметрів (ДП) сигналів є апіорі рівноімовірними. Однак за апіорної нерівноімовірності станів ДП та корельованих шумів застосування НФ в Maximum Likelihood (ML)-алгоритмах не є коректним, водночас дозволяючи уникати експоненціальної залежності їх складності від кількості і позиційності взаємно неортогональних ЦС, що підлягають розділенню. Це є очевидним — при байєсівському підході в теорії БКД правило прийняття рішень (ППР) містить деяку зазвичай нелінійну функцію розподілу (апостеріорну імовірність (AI) станів ДП), аргументом якої є деяка модифікація НФ [1–8]. Слід зазначити, що застосування в аргументі ППР безпосередньо НФ мінімізує імовірність помилки в оцінці групового ДП, який формально складається з індивідуальних ДП всіх взаємно неортогональних ЦС, що підлягають розділенню. Спроба осереднення НФ по станах ДП сигналів, вплив яких треба усунути на той, що необхідно виділити (тобто, спроба одержання НФ для одного зі взаємно неортогональних ЦС), призводить до нероботоздатності ППР за індивідуальними критеріями оптимальності. При такому осередненні з НФ автоматично зникають всі гіпотези про стани ДП сигналів, що заважають тому, для якого виконується ця спроба.

Тому неевристичне одержання компенсаційних процедур шляхом прямого неопосередкованого застосування НФ в алгоритмах розділення-демодуляції взаємно неортогональних ЦС виявляється неможливим. Процедури компенсації притаманні евристичним підходам в теорії БКД (наприклад, Successive Interference Cancellation, SIC) та методам синтезу ML-алгоритмів, оптимальних за критерієм мінімуму ймовірності помилки в оцінці ДП кожного зі взаємно неортогональних ЦС. Однак байєсівські ML-алгоритми характеризуються експоненціальним зростанням їх складності залежно від кількості і позиційності взаємно неортогональних ЦС, що підлягають розділенню. Водночас увага питанням редукції (спрощення) таких алгоритмів до технологічно прийнятної форми у відомих фундаментальних джерелах [4; 5] не приділялась. Як наслідок, за межами доступних публікацій залишаються також питання втрат у завадостійкості внаслідок редукції (тобто, евристичного спрощення) алгоритмів розділення-демодуляції взаємно неортогональних ЦС, оптимальних за індивідуальними критеріями.

**Аналіз попередніх досліджень і публікацій.** Певна увага питанням редукції (спрощення) алгоритмів розділення-демодуляції взаємно неортогональних ЦС до технологічно прийнятної форми у відомих фундаментальних джерелах з теорії БКД [4; 5] приділялась лише у випадках, коли таких сигналів передбачалось суттєво більше двох. Розглядалися неоптимальне кодове, лінійне розділення, розділення за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки. Пропонувались також різноманітні евристичні алгоритми. У випадку вибору в якості критерія оптимальності мінімуму імовірності помилки в оцінці індивідуальних інформаційних ДП в джерелах ([1; 4–6] та ін.) демонструвалась експоненціальна залежність складності оптимальних за вищезазначеним критерієм алгоритмів розділення-демодуляції від кількості та позиційності сигналів, що підлягають розділенню. Разом з тим спроби пошуку спрощень оптимальних ML-алгоритмів, коли взаємно неортогональних ЦС не більше 3–4, а їхня позиційність перевищує двійку, у доступній літературі майже не спостерігаються. Деяка увага приділялась лише питанням апроксимації передатних характеристик компенсаційних трактів [2–4]. За межами доступних публікацій залишаються також питання втрат в завадостійкості внаслідок редукції (тобто, евристичного спрощення) алгоритмів розділення-демодуляції взаємно неортогональних ЦС, оптимальних за індивідуальними критеріями.

Як виняток, у статті [8] був представлений варіант редукції ML-алгоритму розділення-демодуляції трьох взаємно неортогональних двійкових ЦС та виконана оцінка втрат в завадостійкості внаслідок запропонованих спрощень. Безумовний практичний інтерес представляє подальший розвиток досліджень у цьому напрямку, коли кількість та позиційність взаємно неортогональних сигналів будуть дещо більшими, ніж мінімальні два.

Усім публікаціям [8] притаманна одна загальна особливість. За байєсівського підходу в теорії БКД передбачається формування AI групового та індивідуальних ДП. Це, в свою чергу, потребує фільтрації (оцінювання) неінформаційних параметрів всіх взаємно неортогональних ЦС. Однак в зазначених тут джерелах AI передбачаються вже точно відомими. Можна стверджувати, що необхідність оцінювання цих неінформаційних параметрів не тільки не призводить до конфлікту, а й поєднує SIC і ML-підходи в теорії БКД. Як наслідок, має місце підстава для взаємопроникнення, спільного розгортання ML-напряму в теорії БКД і теорії оптимальної нелінійної фільтрації дискретно-неперервних марківських процесів (ТНФ ДНМП) шляхом залучення SIC-технології.

Продемонструємо тут SIC-та ML взаємодоповнюючий зв'язок на простому прикладі.

Для SIC-алгоритмів у випадку наявності у спостереженні трьох ЦС на першому кроці виконується оцінювання ДП першого, найбільш потужного ЦС (неінформаційні параметри всіх сигналів тут вважаємо відомими – оцінюваними з деякою необхідною точністю):

$$r_1^* = \underset{r_1=0, m_1-1}{\operatorname{argmin}} \left\| y_t - s_1(r_1) \right\|^2.$$

Тут і далі  $\|*\|^2$  – норма Фробеніуса.

Потім виконується процедура оцінювання ДП другого ЦС, середнього за потужністю:

$$r_2^* = \underset{r_2=0, m_2-1}{\operatorname{argmin}} \left\| \left( y_t - \hat{s}_1(r_1^*) \right) - s_2(r_2) \right\|^2.$$

Далі, після усунення у вхідному спостереженні  $y_t$  оцінок перших двох сигналів демодулюється третій, найменш потужний:

$$r_3^* = \underset{r_3=0, m_3-1}{\operatorname{argmin}} \left\| \left( y_t - \hat{s}_1(r_1^*) - \hat{s}_2(r_2^*) \right) - s_3(r_3) \right\|^2.$$

Для підоптимальних ML-алгоритмів із прямим залученням неопосередкованих НФ групового спостереження застосовується критерій мінімуму ймовірності помилки в оцінці групового ДП  $r_G = (r_1, r_2, r_3)$ , що формально утворюється з індивідуальних ДП всіх сигналів у спостереженні. Процедура прийняття рішення за груповим критерієм оптимальності, на відміну від SIC, буде однокроковою:

$$r_G^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*) = \underset{(r_1, r_2, r_3)=0, m_1 m_2 m_3-1}{\operatorname{argmin}} \left\| y_t - s_1(r_1) - s_2(r_2) - s_3(r_3) \right\|^2.$$

Після прийняття рішення про стан групового ДП необхідно виконати його перетворення (розущільнення) в індивідуальні відповідно до коду групоутворення (у нашому прикладі – з адитивно утворюваною сигнально-ковою конструкцією).

ML-алгоритм розділення-демодуляції, оптимальний за критерієм мінімуму ймовірності помилки, в оцінці індивідуального ДП того чи іншого сигналу синтезується на основі порівняння індивідуальних AI:

$$r_i^* = \underset{r_i=0, m_i-1}{\operatorname{argmax}} [p(r_i / y_i)], \quad i = \overline{1, 3}.$$

У цьому випадку аргумент ППР містить множину АІ станів індивідуального ДП, за порівнянням яких приймаються рішення. В свою чергу, ці АІ формуються з множини АІ станів групового ДП, що формально утворюється всіма індивідуальними ДП. Наприклад:

$$p(\hat{r}_1 / y_t) = \sum_{\hat{r}_1} p(\hat{r}_1 / y_t) = \sum_{r_2=0}^{m_2-1} \sum_{r_3=0}^{m_3-1} p(\hat{r}_1, r_2, r_3 / y_t); \quad \hat{r}_1 \in \{0, \dots, m_1 - 1\}. \quad (1)$$

Тут  $\hat{r}_1 = (\hat{r}_1, r_2, r_3)$  – всі такі стани групового ДП, де перший індивідуальний ДП  $\hat{r}_1$  є фіксованим. АІ  $p(\hat{r}_1 / y_t)$  станів групового ДП, в свою чергу, формуються із залученням теореми Байєса і модифікованої НФ (так званої сигнальної функції) в якості аргументу, що дозволяє враховувати апріорні ймовірності станів інформаційних ДП і можливу корельованість шумів каналу. В процесі такого формування і виникають компенсаційні процедури усунення перехресного впливу взаємно неортогональних ЦС. Важливо зазначити, що байєсівський підхід дозволяє уникати зворотних компенсаційних зв'язків при формуванні аргументу ППР, які можуть бути причиною самозбудження алгоритму розділення-демодуляції при спробах технічної реалізації. Окрім того, компенсаційні процедури при такому підході виконуються після згорток спостереження – тобто, не на несівних частотах. Можна також стверджувати, що МЛ-алгоритми, оптимальні за критерієм мінімуму ймовірності помилки в оцінюванні індивідуальних ДП, у окремих випадках можна редуціювати до виду, в якому вони будуть характеризуватись близькою до лінійної залежністю складності від кількості та позиційності взаємно неортогональних сигналів. Цьому також сприяє та особливість у галузі електронних комунікацій, що апріорні ймовірності станів інформаційних ДП зазвичай можна вважати однаковими.

Водночас при технічній реалізації МЛ-алгоритмів повністю уникнути супутніх SIC-процедур зі зворотними зв'язками на частоті (частотах) спостереження  $y_t$  представляється неможливим. Справа в тому, що для фільтрації супутніх неінформаційних параметрів кожного з сигналів (їх амплітуд, початкових фаз, тактових точок тощо) доведеться спочатку послідовно окремо виділяти кожен із сигналів, деманіпулювати його і відтворювати відповідні несівні коливання – наприклад, із застосуванням методів ТОНФ ДНМП.

**Мета.** На прикладі розробки МЛ-алгоритму розділення-демодуляції двох сигналів QPSK визначити додаткові обмеження для можливості виконання процедури редукції і одержати оцінку втрат у завадостійкості внаслідок виконаної редукції.

**Постановка задачі.** Виконати синтез алгоритму розділення-демодуляції двох синхронних взаємно неортогональних сигналів QPSK, оптимального за критерієм мінімуму ймовірності помилки в оцінюванні інформаційних ДП кожного з сигналів. Редуціювати синтезований оптимальний алгоритм до технічно прийняттого виду. Оцінити втрати в завадостійкості внаслідок редукції.

**Виклад основного матеріалу.**

**1. Синтез і редукція МЛ-алгоритмів розділення-демодуляції двох синхронних взаємно неортогональних QPSK-сигналів**

Нехай модель спостереження для чотирьох BPSK-сигналів, синхронних за тактовими точками, має загальний вигляд:

$$y_t = (-1)^{r_1} s_1(t) + (-1)^{r_2} s_2(t) + (-1)^{r_3} s_3(t) + (-1)^{r_4} s_4(t) + n(t), \quad (2)$$

$$t \in (t_{k-1}, t_k], \quad T = t_k - t_{k-1}.$$

Тут  $r_{1,\dots,4} \in \{0,1\}$  – інформаційні дискретні параметри (ДП) сигналів;  $n(t)$  – адитивний білий гауссівський шум (АБГШ);  $T$  – протяжність інформаційного тактового інтервалу.

У випадку когерентного прийому, за рівномірних апіорних станів усіх інформаційних ДП:  $p(r_i = 0) = p(r_i = 1) = 0,5$ ,  $i = \overline{1,4}$  ППР  $r_1^*$  щодо стану першого ДП в гауссівському каналі з постійними параметрами із залученням (1) [1; 3; 4] ППР  $r_1^*$  може бути представлено у вигляді:

$$r_1^* = \text{rect} \left\{ \frac{1}{K_z} \left[ \begin{aligned} &sh[b_1 - 2(-R_{12} - R_{13} - R_{14})] \exp[-b_2 - b_3 - b_4 - 2(R_{23} + R_{24} + R_{34})] + \\ &+ sh[b_1 - 2(-R_{12} - R_{13} + R_{14})] \exp[-b_2 - b_3 + b_4 - 2(-R_{23} - R_{24} - R_{34})] + \\ &+ sh[b_1 - 2(-R_{12} + R_{13} - R_{14})] \exp[-b_2 + b_3 - b_4 - 2(-R_{23} + R_{24} - R_{34})] + \\ &+ sh[b_1 - 2(-R_{12} + R_{13} + R_{14})] \exp[-b_2 + b_3 + b_4 - 2(-R_{23} - R_{24} + R_{34})] + \\ &+ sh[b_1 - 2(+R_{12} - R_{13} - R_{14})] \exp[+b_2 - b_3 - b_4 - 2(-R_{23} - R_{24} + R_{34})] + \\ &+ sh[b_1 - 2(+R_{12} - R_{13} + R_{14})] \exp[+b_2 - b_3 + b_4 - 2(-R_{23} + R_{24} - R_{34})] + \\ &+ sh[b_1 - 2(+R_{12} + R_{13} - R_{14})] \exp[+b_2 + b_3 - b_4 - 2(-R_{23} - R_{24} - R_{34})] + \\ &+ sh[b_1 - 2(+R_{12} + R_{13} + R_{14})] \exp[+b_2 + b_3 + b_4 - 2(R_{23} + R_{24} + R_{34})] \end{aligned} \right] \right\}; \quad (3)$$

$$\text{rect}(x \geq 0) = 1, \quad \text{rect}(x < 0) = 0.$$

Тут  $K_z = 8chb_1chb_2chb_3chb_4chR_{12}chR_{13}chR_{14}chR_{23}chR_{24}chR_{34} > 0$ ,

$$b_{1,\dots,4} = \frac{2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} y_t s_{1,\dots,4}(t) dt; \quad R_{ij} = \frac{1}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} s_i(t) s_j(t) dt, \quad i, j = \overline{1,4}, \quad i \neq j,$$

де  $N_0$  – одностороння спектральна щільність потужності АБГШ  $n(t)$ .

Після гомоморфних перетворень (у сенсі збереження знаку аргументу) ППР  $r_1^*$  (3) за моделі спостереження (2), оптимальне за індивідуальним критерієм мінімуму ймовірності помилки в оцінці першого ДП можна одержати у вигляді, де його аргумент містить виключно адитивну комбінацію добутків функцій  $th(*)$ .

$$r_1^* = \text{rect} \left\{ \begin{aligned} &-[K_0 thb_1 + K_{12} thb_2 + K_{13} thb_3 + K_{14} thb_4 + K_R thb_2 thb_3 thb_4 + \\ &+ K_{23} thb_1 thb_2 thb_3 + K_{24} thb_1 thb_2 thb_4 + K_{34} thb_1 thb_3 thb_4] \end{aligned} \right\}; \quad (4)$$

$$\text{rect}(x \geq 0) = 1, \quad \text{rect}(x < 0) = 0.$$

Зазначимо, що при такому представленні аргументу ППР через функції  $th(*)$  технічна реалізація спроститься. Передатня характеристика такої функції, як відомо, добре апроксимується лінійно-ламанною з межами  $\pm 1$ .

Однак у загальному випадку, коли всі чотири сигнали є взаємно неортогональними, коефіцієнти  $K_0, K_R, K_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1,4}$ ,  $i \neq j$  у ППР (4) за вищезазначеного критерію оптимальності виявляються непринятно громіздкими навіть за умови взаємного тактового синхронізму. Дійсно, коефіцієнти у (4) мають вигляд (5):

$$\begin{aligned}
 K_0 &= 1 - \left( th2R_{12}th2R_{13}th2R_{23} + th2R_{12}th2R_{14}th2R_{24} + th2R_{13}th2R_{14}th2R_{34} + th2R_{23}th2R_{24}th2R_{34} + \right. \\
 &\quad \left. + th2R_{12}th2R_{13}th2R_{24}th2R_{34} + th2R_{12}th2R_{14}th2R_{23}th2R_{34} + th2R_{13}th2R_{14}th2R_{23}th2R_{24} \right); \\
 K_{12} &= -th2R_{12} + th2R_{13}th2R_{23} + th2R_{14}th2R_{24} - th2R_{13}th2R_{24}th2R_{34} - th2R_{14}th2R_{23}th2R_{34} + \\
 &\quad + th2R_{12}th2R_{13}th2R_{14}th2R_{34} + th2R_{12}th2R_{23}th2R_{24}th2R_{34} - th2R_{12}th2R_{13}th2R_{14}th2R_{23}th2R_{24}; \\
 K_{13} &= -th2R_{13} + th2R_{12}th2R_{23} + th2R_{14}th2R_{34} - th2R_{12}th2R_{24}th2R_{34} - th2R_{14}th2R_{23}th2R_{24} + \\
 &\quad + th2R_{12}th2R_{13}th2R_{14}th2R_{24} + th2R_{13}th2R_{23}th2R_{24}th2R_{34} - th2R_{12}th2R_{13}th2R_{14}th2R_{23}th2R_{34}; \\
 K_{14} &= -th2R_{14} + th2R_{12}th2R_{24} + th2R_{13}th2R_{34} - th2R_{12}th2R_{23}th2R_{34} - th2R_{13}th2R_{23}th2R_{24} + \\
 &\quad + th2R_{12}th2R_{13}th2R_{14}th2R_{23} + th2R_{14}th2R_{23}th2R_{24}th2R_{34} - th2R_{12}th2R_{13}th2R_{14}th2R_{24}th2R_{34}; \quad (5) \\
 K_{23} &= -th2R_{23} + th2R_{12}th2R_{13} + th2R_{24}th2R_{34} - th2R_{12}th2R_{14}th2R_{34} - th2R_{13}th2R_{14}th2R_{24} + \\
 &\quad + th2R_{12}th2R_{14}th2R_{23}th2R_{24} + th2R_{13}th2R_{14}th2R_{23}th2R_{34} - th2R_{12}th2R_{13}th2R_{23}th2R_{24}th2R_{34}; \\
 K_{24} &= -th2R_{24} + th2R_{12}th2R_{14} + th2R_{23}th2R_{34} - th2R_{12}th2R_{13}th2R_{34} - th2R_{13}th2R_{14}th2R_{23} + \\
 &\quad + th2R_{12}th2R_{13}th2R_{23}th2R_{24} + th2R_{13}th2R_{14}th2R_{24}th2R_{34} - th2R_{12}th2R_{14}th2R_{23}th2R_{24}th2R_{34}; \\
 K_{34} &= -th2R_{34} + th2R_{13}th2R_{14} + th2R_{23}th2R_{24} - th2R_{12}th2R_{13}th2R_{24} - th2R_{12}th2R_{14}th2R_{23} + \\
 &\quad + th2R_{12}th2R_{13}th2R_{23}th2R_{34} + th2R_{12}th2R_{14}th2R_{24}th2R_{34} - th2R_{13}th2R_{14}th2R_{23}th2R_{24}th2R_{34}; \\
 K_R &= th2R_{12}th2R_{34} + th2R_{13}th2R_{24} + th2R_{14}th2R_{23} - th2R_{12}th2R_{13}th2R_{14} - th2R_{12}th2R_{23}th2R_{24} - \\
 &\quad - th2R_{13}th2R_{23}th2R_{34} - th2R_{14}th2R_{24}th2R_{34} + th2R_{12}th2R_{13}th2R_{14}th2R_{23}th2R_{24}th2R_{34}.
 \end{aligned}$$

Тут:

$$b_{1,..,4} = \frac{2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} y_t s_{1,..,4}(t) dt; \quad R_{ij} = \frac{1}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} s_i(t) s_j(t) dt, \quad i, j = \overline{1,4}, \quad i \neq j,$$

Неприйнятна з точки зору технічної реалізації складність ППР (4) є очевидною. Окрім того у виді (4) з урахуванням (5) неможливою є спроба знайти прозоре пояснення принципу функціонування цього ППР, його компенсацийний характер.

Розглянемо приклад, що може становити інтерес із точки зору можливості фізичного відтворення. Нехай модель спостереження містить два взаємно неортогональні QPSK-сигнали. Будемо вважати, що сигнали за тактовими точками і протяжністю  $T$  інформаційних тактових інтервалів співпадають, що є характерним, наприклад, у напрямку базова станція – мобільний абонент. Модель спостереження (2) конкретизуємо до вигляду:

$$\begin{aligned}
 y_t &= (-1)^{r_1} A_1 \cos \omega t + (-1)^{r_2} A_1 \sin \omega t + (-1)^{r_3} A_2 \cos(\omega t + \varphi) + (-1)^{r_4} A_2 \sin(\omega t + \varphi) + n(t), \\
 t &\in (t_{k-1}, t_k], \quad T = t_k - t_{k-1}.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Нехай початкова фаза  $\varphi \in \overline{0, 2\pi}$  рівномірно розподілена, та будемо вважати сигнали нерівнопотужними. Покладемо також  $A_2 \geq 2A_1$ , що відповідно до результатів розрахунків,

наведених в [8], дозволяє сподіватись на суттєве зменшення складності алгоритму розділення. Справа в тому, що як доводять результати численних досліджень, різниця в потужностях взаємно неортогональних сигналів є обов'язковою умовою можливості їх демодуляції з прийнятною якістю. Другий, більш потужніший QPSK-сигнал, за такої умови можна буде обробляти класично, без урахування впливу малопотужного першого. При цьому на підставі результатів [1; 6–8] слід очікувати, що завадостійкість демодуляції останнього буде наближатись до потенційної завадостійкості в каналі без другого сигналу, якщо вплив потужнішого другого сигналу на перший передбачається точно компенсувати.

Після редукції ППР  $r_{1,2}^*$  щодо станів  $r_{1,2}$  першого ДП малопотужного ЦС, в процесі якої на першому кроці слід врахувати відсутність взаємних впливів  $R_{12} = 0$ ,  $R_{34} = 0$ , коефіцієнти  $K_0$ ,  $K_R$ ,  $K_{ij}$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;  $j = \overline{2,4}$ ;  $i \neq j$  порівняно з (5) приймуть суттєво спрощений вигляд, а їхні складові відповідно до моделі спостереження (6) конкретизуються:

$$\begin{aligned} K_0 &= 1 - th2R_{13}th2R_{14}th2R_{23}th2R_{24}; & K_{12} &= th2R_{13}th2R_{23} + th2R_{14}th2R_{24}; \\ K_{13} &= -th2R_{13} - th2R_{14}th2R_{23}th2R_{24}; & K_{14} &= -th2R_{14} - th2R_{13}th2R_{23}th2R_{24}; \\ K_{23} &= -th2R_{23} - th2R_{13}th2R_{14}th2R_{24}; & K_{24} &= -th2R_{24} - th2R_{13}th2R_{14}th2R_{23}; \\ K_{34} &= th2R_{13}th2R_{14} + th2R_{23}th2R_{24}; & K_R &= th2R_{13}th2R_{24} + th2R_{14}th2R_{23}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут відповідно до конкретизованої моделі спостереження (6):

$$\begin{aligned} R_{13} &= \frac{A_1 A_2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) dt; & R_{14} &= \frac{A_1 A_2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt; \\ R_{23} &= \frac{A_1 A_2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin \omega t \cos(\omega t + \varphi) dt; & R_{24} &= \frac{A_1 A_2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt. \end{aligned}$$

Далі пропонується знехтувати в моделі спостереження (6) опосередкованим зворотнім перехресним впливом ортогональних складових першого, малопотужного QPSK-сигналу, через складові другого, потужнішого, на перший. Для цього в аргументах обох ППР  $r_{1,2}^*$  за станами ДП  $r_{1,2}$  малопотужного першого QPSK-сигналу спростуємо складові, що містять множники  $thb_2$  або  $thb_1$  відповідно:

$$r_1^* = \text{rect} \{ -[K_0 thb_1 + K_{13} thb_3 + K_{14} thb_4 + K_{34} thb_1 thb_3 thb_4] \}; \quad (8a)$$

$$r_2^* = \text{rect} \{ -[K_0 thb_2 + K_{23} thb_3 + K_{24} thb_4 + K_{34} thb_2 thb_3 thb_4] \}. \quad (8б)$$

$$\text{rect}(x \geq 0) = 1, \quad \text{rect}(x < 0) = 0.$$

Перепишемо на цьому кроці ППР (8a), (8б) у вигляді:

$$r_1^* = \text{rect} \{ -[thb_1 (K_0 + K_{34} thb_3 thb_4) + K_{13} thb_3 + K_{14} thb_4] \}; \quad (9a)$$

$$r_2^* = \text{rect} \left\{ -[thb_2 (K_0 + K_{34}thb_3thb_4) + K_{23}thb_3 + K_{24}thb_4] \right\}. \quad (96)$$

$$\text{rect}(x \geq 0) = 1, \quad \text{rect}(x < 0) = 0.$$

За припущення про відсутність зворотного опосередкованого перехресного впливу складових першого сигналу через складові другого на перший далі в коефіцієнтах (7) врахуємо, що в ППР (9а):

$$K_0 = 1, K_{13} = -th2R_{13}, K_{14} = -th2R_{14}, K_{34} = th2R_{13}th2R_{14},$$

а в ППР (9б):

$$K_0 = 1, K_{23} = -th2R_{23}, K_{24} = -th2R_{24}, K_{34} = th2R_{23}th2R_{24}.$$

Тоді з (9а), (9б) одержуємо :

$$\begin{aligned} r_1^* &= \text{rect} \left\{ -\left[ b_1 - \text{Arth} \left( \frac{th2R_{13}thb_3 + th2R_{14}thb_4}{1 + th2R_{13}th2R_{14}thb_3thb_4} \right) \right] \right\} = \\ &= \text{rect} \left[ -b_1 + \text{Arth}(th2R_{13}thb_3) + \text{Arth}(th2R_{14}thb_4) \right]; \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} r_2^* &= \text{rect} \left\{ -\left[ b_2 - \text{Arth} \left( \frac{th2R_{23}thb_3 + th2R_{24}thb_4}{1 + th2R_{23}th2R_{24}thb_3thb_4} \right) \right] \right\} = \\ &= \text{rect} \left[ -b_2 + \text{Arth}(th2R_{23}thb_3) + \text{Arth}(th2R_{24}thb_4) \right]. \end{aligned} \quad (10б)$$

$$\text{rect}(x \geq 0) = 1, \quad \text{rect}(x < 0) = 0.$$

де згідно з моделлю спостереження (5):

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2A_1}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} y_t \cos \omega t dt; \quad b_2 = \frac{2A_1}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} y_t \sin \omega t dt; \\ b_3 &= \frac{2A_2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} y_t \cos(\omega t + \varphi) dt; \quad b_4 = \frac{2A_2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} y_t \sin(\omega t + \varphi) dt. \end{aligned}$$

За відміни в миттєвих потужностях між QPSK-сигналами не менше 6 дБ і відношеннях сигнал/шум  $8 \div 10$  дБ або більше ППР (10а), (10б) без помітних втрат у завадостійкості можна ще спростити:

$$r_1^* = \text{rect}(-b_1 + 2R_{13}signb_3 + 2R_{14}signb_4); \quad (11a)$$

$$r_2^* = \text{rect}(-b_2 + 2R_{23}signb_3 + 2R_{24}signb_4); \quad (11б)$$

$$\text{sign}(x \geq 0) = 1; \quad \text{sign}(x < 0) = -1.$$

Структурна схема алгоритму розділення-демодуляції двох взаємно неортогональних QPSK-сигналів, синхронних за тактовими точками з урахуванням редуційованих представлень (11а), (11б), наведена на рисунку 1.

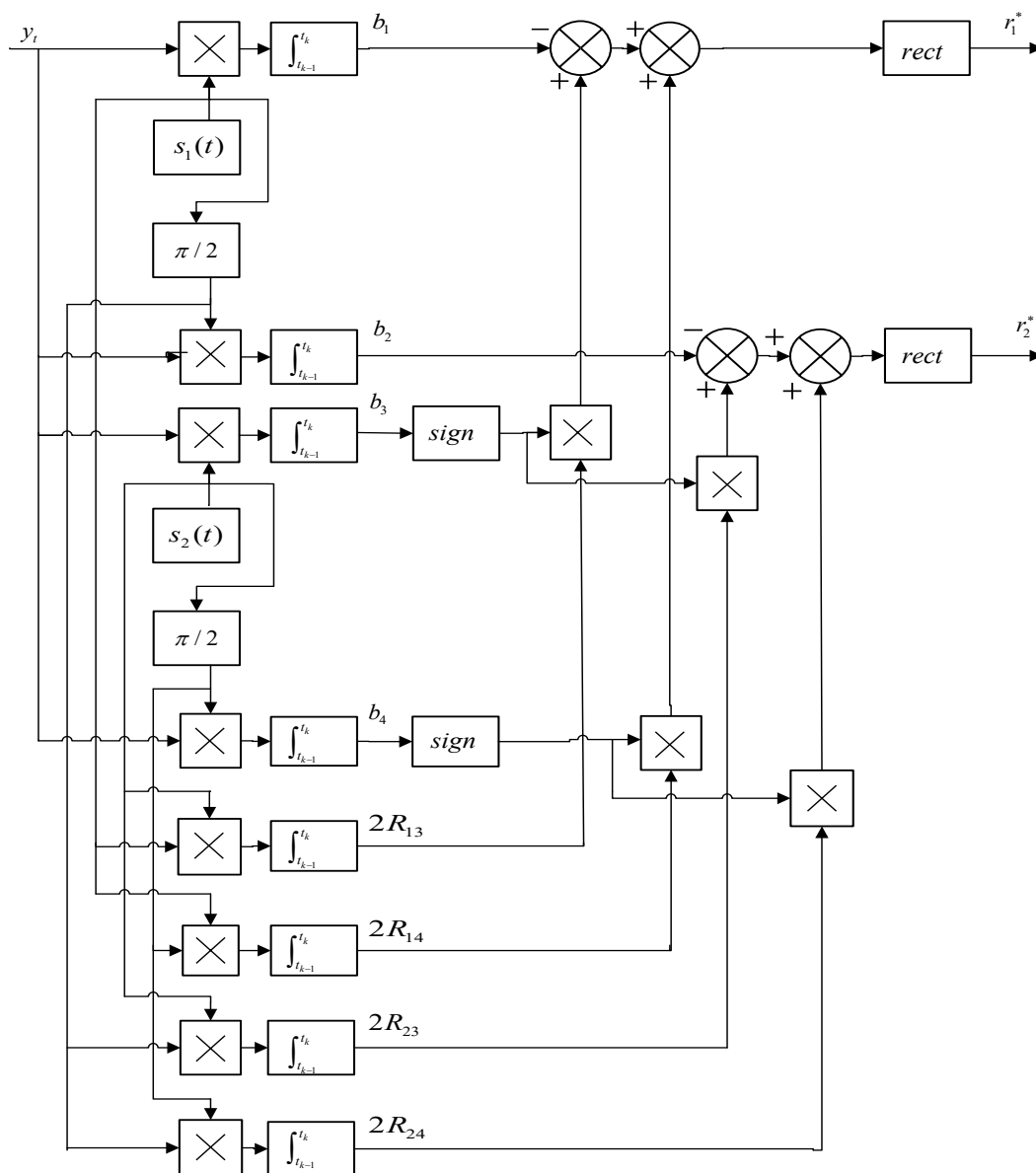


Рис. 1. Структурна схема алгоритму розділення-демодуляції взаємно неортогональних сигналів QPSK, синхронних за тактовими точками

За редуційованого перетворення ППР (4) до виду (11а), (11б) (див. рис. 1) сумніви в можливості технічної реалізації не виникають – необхідність у застосуванні громіздких комбінацій гіперболічних функцій відпадає. Відповідно, на наступному етапі слід визначитись із втратами в завадостійкості внаслідок запропонованих апроксимацій передатних характеристик компенсаційних трактів.

## 2. Оцінювання завадостійкості редуційованого алгоритму.

Розрахунки втрат в імовірностях помилки виду  $r_{3,4}^* = 1 - r_{3,4}^*$  внаслідок некомпенсованого впливу складових малопотужного QPSK-сигналу на складові більш потужного для найгіршого випадку – їх тактового синхронізму та тотожності несівних – може бути виконана за виразом:

$$\begin{aligned}
 P_{3,4}(r_{3,4}^* \neq r_{3,4}) &= \frac{1}{8\pi} \sum_{r_1=0}^1 \sum_{r_2=0}^1 \int_0^{2\pi} \overline{F} \left[ \sqrt{h_{3,4}^2} \left( 1 + (-1)^{r_1} \cos \varphi \sqrt{\frac{h_1^2}{h_{3,4}^2}} + (-1)^{r_2} \sin \varphi \sqrt{\frac{h_1^2}{h_{3,4}^2}} \right) \right] d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r_1=0}^1 \sum_{r_2=0}^1 \int_0^{\pi/2} \overline{F} \left\{ \sqrt{h_{3,4}^2} \left[ 1 + \left[ (-1)^{r_1} \cos \varphi + (-1)^{r_2} \sin \varphi \right] \sqrt{\frac{h_1^2}{h_{3,4}^2}} \right] \right\} d\varphi; \\
 \overline{F}(x) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-z^2/2) dz, \quad h_{3,4}^2 = \frac{A_2^2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos^2 \omega t dt.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Тут  $\varphi$  – випадкова відміна в початкових фазах однакових за частотою несівних QPSK-сигналів, рівномірно розподілена на інтервалі  $(0, 2\pi)$ . За фіксованого значення  $\cos(\varphi = \pi/4) = \sin(\varphi = \pi/4) = 1/\sqrt{2} = 0,707$  розрахунки дають верхню оцінку ймовірності помилки. У цьому граничному випадку з (12) маємо:

$$\begin{aligned}
 P_{3,4}(r_{3,4}^* \neq r_{3,4}) &= \frac{1}{4} \sum_{r_1=0}^1 \sum_{r_2=0}^1 \overline{F} \left\{ \sqrt{h_{3,4}^2} \left[ 1 + 0,707 \left[ (-1)^{r_1} + (-1)^{r_2} \right] \sqrt{\frac{h_1^2}{h_{3,4}^2}} \right] \right\} = \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \overline{F} \left[ \sqrt{h_{3,4}^2} \left( 1 + 1,414 \sqrt{\frac{h_1^2}{h_{3,4}^2}} \right) \right] + \overline{F} \left[ \sqrt{h_{3,4}^2} \left( 1 - 1,414 \sqrt{\frac{h_1^2}{h_{3,4}^2}} \right) \right] + 2\overline{F} \left( \sqrt{h_{3,4}^2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Результати розрахунків згідно з (13) наведено на рисунку 2. Можна бачити, що відмова від компенсації впливу менш потужного QPSK-сигналу на більш потужний за довільного ступеня неортогональності в найгіршому випадку їх взаємного синхронізму за тактовими точками потребує збільшення енергетики останнього в межах 9 дБ.

На підставі того, що відміна в миттєвих потужностях QPSK-сигналів потрібна бути близько 9 дБ (див. графіки на рис. 2), оцінку завадостійкості менш потужнішого сигналу доцільно виконувати із залученням найпростіших редуційованих ППР (11а), (11б), де передбачається тактовий синхронізм. Із досвіду аналізу алгоритмів розділення двійкових взаємно неортогональних BPSK-сигналів відомо, що умова тактового синхронізму призводить до найгіршої завадостійкості [1; 3; 6; 7], і такий підхід в аналізі призведе до одержання оцінок завадостійкості “зверху”.

Загальний вираз для ймовірності помилки в першій складовій малопотужного QPSK-сигналу при розділенні-демодуляції двох таких сигналів, асинхронних за тактовими точками за рівноймовірних апіорних станів їх ДП запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
 P_1(r_1^{k*} \neq r_1^k) &= P_1(r_1^{k*} = 1 - r_1^k) = \\
 &= \frac{1}{512} \sum_{r_1^{k-1}=0}^1 \sum_{r_2^{k-1}=0}^1 \sum_{r_2^k=0}^1 \sum_{r_1^{k+1}=0}^1 \sum_{r_2^{k+1}=0}^1 \sum_{r_3^{k-1}=0}^1 \sum_{r_3^k=0}^1 \sum_{r_4^{k-1}=0}^1 \sum_{r_4^k=0}^1 P_1 \left( r_1^{k*} = 1 - r_1^k / \right. \\
 &\quad \left. r_1^{k-1}, r_2^{k-1}, r_2^k, r_1^k, r_1^{k+1}, r_2^{k+1}, r_3^{k-1}, r_4^{k-1}, r_3^k, r_4^k \right).
 \end{aligned} \tag{14}$$

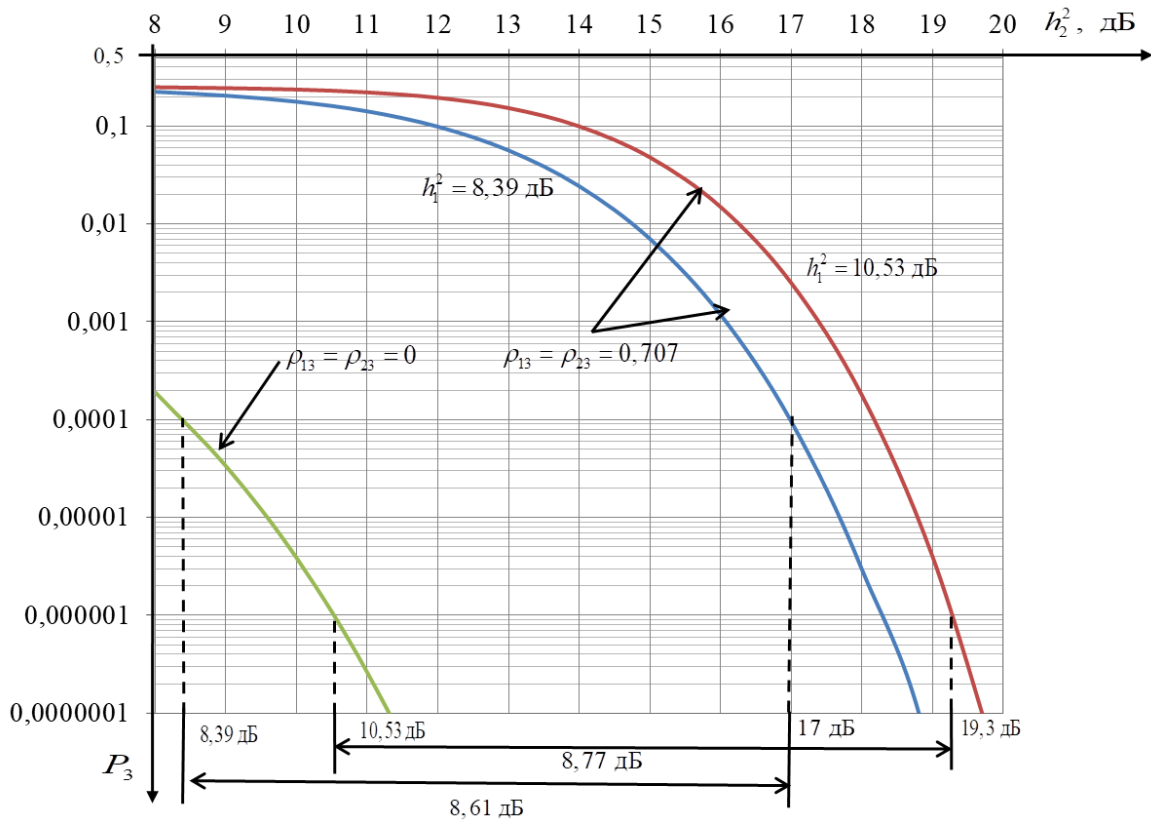


Рис. 2. Імовірність помилки при когерентній демодуляції складової змінного за потужністю QPSK-сигналу за присутності подібного з потужністю складових 8,39 дБ або 10,53 дБ

За відміни QPSK-сигналів у миттєвих потужностях орієнтовно на 9 дБ опосередкованими впливами другої складової малопотужного сигналу на його першу складову на  $k$ -му тактовому інтервалі та обох його складових на суміжних тактових інтервалах за умови тактового синхронізму можна знехтувати, вираз (14) спростимо, враховуючи також тотожність умовних помилок:

$$P_1(r_1^{k*} = 0 / r_1^k = 1, r_3^{k-1}, r_4^{k-1}, r_3^k, r_4^k) \equiv P_1(r_1^{k*} = 1, / r^k = 0, r_3^{k-1}, r_4^{k-1}, r_3^k, r_4^k).$$

Тоді:

$$P_1(r_1^{k*} \neq r_1^k) = \frac{1}{16} \sum_{r_3^{k-2}=0}^1 \sum_{r_4^{k-2}=0}^1 \sum_{r_3^{k-1}=0}^1 \sum_{r_4^{k-1}=0}^1 P_1(r_1^{k*} = 1 - r_1^k / r_1^k, r_3^{k-1}, r_4^k, r_3^{k-1}, r_4^k). \quad (15)$$

Нас насамперед цікавить оцінка “зверху” ймовірності помилки, яку можна одержати за припущення про тактовий синхронізм взаємно неортогональних сигналів [1; 3; 6; 7]. У цьому випадку (15) перепишеться у ще простішому вигляді:

$$P_1(r_1^* \neq r_1) = \frac{1}{4} \sum_{r_3=0}^1 \sum_{r_4}^1 P_1(r_1^* = 0, r_1 = 1 / r_3, r_4). \quad (16)$$

Приклад виразу для умовних імовірностей помилки згідно з ППР (10а) буде мати вигляд (через симетрію умовних імовірностей помилки обмежимося тут і далі згідно з (16) помилками виду  $r_1^* = 0, r_1 = 1$ ):

$$P_1(r_1^* = 0 / r_1 = 1, r_3, r_4) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{B_1} \omega(b_1, b_3, b_4 / r_3, r_4) db_1 db_3 db_4. \quad (17)$$

Тут згідно з редуційованим ППР (10а) межа прийняття рішень  $B_1 = \text{Arth}(th2R_{23}, thb_3) + \text{Arth}(th2R_{24}, thb_4)$ ,  $\omega(\cdot)$  – тривимірна гаусівська функція щільності ймовірності (ФШЦІ), умовна за станами ДП  $r_1, r_3, r_4$ :

$$\omega(b_1, b_3, b_4, \rho_{13}, \rho_{14} / r_1, r_3, r_4) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sqrt{(2\pi)^3 D}} \exp \left[ -\frac{1}{2D} \sum_{i=1,3,4} \sum_{j=1,3,4} \frac{D_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} (b_i - m_i)(b_j - m_j) \right].$$

$$m_1 = m_1(r_1 = 1, r_3, r_4) = 2h_1^2 [-1 + (-1)^{r_3} \rho_{13} / l^2 + (-1)^{r_4} \rho_{14} / l^2] =$$

$$= 2h_1^2 [-1 + (-1)^{r_3} \cos \varphi / l^2 + (-1)^{r_4} \sin \varphi / l^2];$$

$$m_3 = m_3(r_1 = 1, r_2, r_3) = 2h_1^2 [-\rho_{13} / \sqrt{l^2} + (-1)^{r_2} \rho_{14} / \sqrt{l^2} + (-1)^{r_3} / l^2] =$$

$$= 2h_1^2 [-\cos \varphi / \sqrt{l^2} + (-1)^{r_2} \sin \varphi / \sqrt{l^2} + (-1)^{r_3} / l^2];$$

$$m_4 = m_4(r_1 = 1, r_2, r_4) = 2h_1^2 [-\rho_{14} / \sqrt{l^2} + (-1)^{r_2} \rho_{13} / \sqrt{l^2} + (-1)^{r_4} / l^2] =$$

$$= 2h_1^2 [-\sin \varphi / \sqrt{l^2} + (-1)^{r_2} \cos \varphi / \sqrt{l^2} + (-1)^{r_4} / l^2].$$

У цих виразах згідно з моделлю спостереження (6) додатково до застосованих в (7) та (10а) введені позначення:

$$h_1^2 = \frac{1}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} s_1^2(t) dt = \frac{1}{N_0} \int_0^T s_1^2(t) dt = \frac{A_1}{N_0} \int_0^T \cos^2(t) dt;$$

$$h_{3,4}^2 = \frac{1}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} s_{3,4}^2(t) dt = \frac{A_2}{N_0} \int_0^T \cos^2(t) dt = \frac{A_2}{N_0} \int_0^T \sin^2(t) dt;$$

$$l^2 = h_1^2 / h_{3,4}^2;$$

$$\rho_{13} = R_{13} / \sqrt{h_1^2 h_{3,4}^2} = \cos \varphi; \rho_{14} = R_{14} / \sqrt{h_1^2 h_{3,4}^2} = \sin \varphi;$$

$$R_{13} = \frac{A_1 A_2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{A_1 A_2}{N_0} \cos \varphi = h_1^2 \cos \varphi / \sqrt{l^2};$$

$$R_{14} = \frac{A_1 A_2}{N_0} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{A_1 A_2}{N_0} \sin \varphi = h_1^2 \sin \varphi / \sqrt{l^2}.$$

Відповідно, середньоквадратичні відхилення:  $\sigma_1 = \sqrt{2h_1^2}$ ;  $\sigma_3 = \sigma_4 = \sqrt{2h_1^2 / l^2}$ .

Виконаємо тепер зручне для розрахунків центрування та нормування випадкових величин  $b_1, b_3, b_4$ :  $x_i = (b_i - m_i) / \sigma_i, i = 1, 3, 4$ . Введемо відповідні перетворення:

$$x_1 = (b_1 - m_1) / \sqrt{2h_1^2}; \quad x_3 = (b_3 - m_3) / \sqrt{2h_1^2 / l^2}; \quad x_4 = (b_4 - m_4) / \sqrt{2h_1^2 / l^2}.$$

$$\text{Тоді щільність імовірності } \omega(x_1, x_3, x_4, \rho_{13}, \rho_{14}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 D}} \exp \left[ -\frac{1}{2D} \sum_{i=1,3,4} \sum_{j=1,3,4} D_{ij} x_i x_j \right],$$

де

$$D = 1 - \rho_{13}^2 + \rho_{14}^2; \quad D_{11} = 1; \quad D_{33} = 1 - \rho_{14}^2; \quad D_{44} = 1 - \rho_{13}^2; \\ D_{13} = D_{31} = -\rho_{13}; \quad D_{14} = D_{41} = \rho_{14}; \quad D_{34} = D_{43} = -\rho_{13}\rho_{14}.$$

Зокрема, при  $\rho_{13} = \rho_{14} = 0$  маємо:

$$\omega(x_1, x_3, x_4, 0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp \left( -\frac{x_1^2 + x_3^2 + x_4^2}{2} \right),$$

що опосередковано підтверджує розмірковування.

Тепер вираз (17) для умовної ймовірності помилки при аналізі ППР (10а) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_1(r_1^* = 0, r_1 = 1/r_3, r_4) = \\ = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{[\widehat{B}_1 - m_1(r_1=1, r_3, r_4)]/\sigma_1^2} \omega(x_1, x_3, x_4, \rho_{13}, \rho_{14}) dx_1 dx_3 dx_4. \end{aligned} \quad (18)$$

Тут межа прийняття рішень в ППР (10а):

$$\begin{aligned} \widehat{B}_1 \triangleq \widehat{B}_1(x_3, x_4) = \widehat{B}_1 \left[ x_3 \sqrt{2h_1^2 / l^2} + m_3(r_1 = 1, r_2, r_3), x_4 \sqrt{2h_1^2 / l^2} + m_4(r_1 = 1, r_2, r_4) \right] = \\ = \text{Arth} [th(x_3 \sqrt{2h_1^2 / l^2} + m_3(r_1 = 1, r_2, r_3))] th 2R_{13} + \\ + \text{Arth} [th(x_4 \sqrt{2h_1^2 / l^2} + m_4(r_1 = 1, r_2, r_4))] th 2R_{14}. \end{aligned}$$

При подальшій редукції ППР (10а) до вигляду (11а) ця межа спрощується до вигляду:

$$\begin{aligned} \overline{B}_1(x_3, x_4) = 2R_{13} \text{sign} \left( x_3 \sqrt{\frac{2h_1^2}{l^2}} + m_3(r_1 = 1, r_2, r_3) \right) + \\ + 2R_{14} \text{sign} \left( x_4 \sqrt{2h_1^2 / l^2} + m_4(r_1 = 1, r_2, r_4) \right) \end{aligned}$$

Тоді при аналізі редуційованого ППР (11а) межі інтегрування у виразах для умовних імовірностей помилки, на відміну від (18), будуть взаємно незалежними, що спрощує розрахунки:

$$\begin{aligned} \overline{P}_1(r_1^* = 0, r_1 = 1/r_3, r_4) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{[\overline{B}_1 - m_1(r_1=1, r_3, r_4)]/\sigma_1^2} \omega(x_1, x_3, x_4, \rho_{13}, \rho_{14}) dx_1 dx_3 dx_4 = \\ = 1 - \left( \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{-2R_{13} - 2R_{14}} + \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{2R_{13} - 2R_{14}} + \right. \\ \left. \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{2R_{13} + 2R_{14}} + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{-2R_{13} + 2R_{14}} \right) \omega(x_1, x_3, x_4, \rho_{13}, \rho_{14}) dx_1 dx_3 dx_4. \end{aligned} \quad (19)$$

Результати розрахунків верхньої межі завадостійкості демодуляції першої складової малопотужного QPSK-сигналу згідно з (18) (неперервні лінії) та (19) (пунктирні лінії) із залученням загального виразу (16) представлені на рисунку 3.

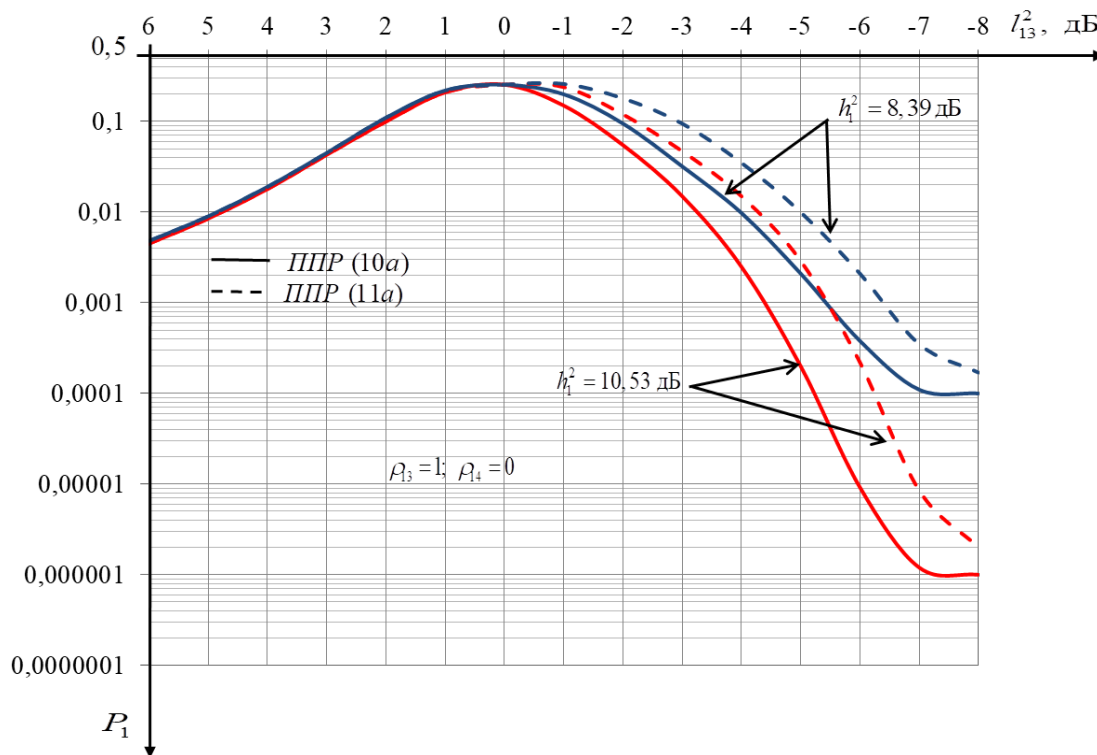


Рис. 3. Верхня межа ймовірності помилки при когерентній демодуляції складової QPSK-сигналу з фіксованою потужністю на рівнях 8,39 дБ та 10,53 дБ за присутності подібного, змінного за потужністю

Результати розрахунків, наведених на рисунках 2, 3, доводять, що при відмові від компенсації впливу менш потужного сигналу QPSK на більш потужний і застосуванні редуційованих ППР (10a) та (11a) цілком достатньо відмін у миттєвих потужностях взаємно неортогональних QPSK-сигналів близько 9 дБ.

### Висновки

Оптимальний за критерієм мінімуму ймовірності помилки в оцінці інформаційних ДП алгоритм розділення-демодуляції взаємно неортогональних QPSK-сигналів суттєво спрощується, якщо відмовитись у компенсаційних гілках опосередкованого зв'язку між ортогональними складовими малопотужного QPSK-сигналу та апроксимувати аналітично складі передатні характеристики компенсаційних трактів простими лінійно-ламаними.

Гарантоване ефективне розділення-демодуляція двох взаємно неортогональних QPSK-сигналів порівняно з розділенням BPSK-сигналів потребує відміни в їх миттєвих потужностях близько 9 дБ. Таке необхідне збільшення близько до 3 дБ у потужностях для розділення-демодуляції QPSK-сигналів обумовлене тим, що амплітуда результуючого сумарного впливу квадратурних складових малопотужного сигналу окремо на кожен складову більш потужного в чверті випадків за рівномірних апріорних станів їх ДП при найгіршій ситуації  $\varphi = \pi / 4$  буде за амплітудою в  $\sqrt{2} = 1,41$  разів більшою (тобто, вдвічі більшою за потужністю).

Застосування ML-підходу при розділенні-демодуляції взаємно неортогональних QPSK-сигналів порівняно з SIC-алгоритмами за ідеалізованих умов (точного знання

неінформаційних параметрів сигналів) забезпечує незначне покращення завадостійкості, тим менш помітніше, чим більше відношення сигнал/шум. Однак процедури компенсації заважаючих впливів в ML-алгоритмах, на відміну від SIC, виконуються без зворотних зв'язків, що мінімізує можливість самозбудження і затримки при технічній реалізації. Окрім того, компенсація в редуційованих алгоритмах виконується не на несівній (або проміжній) частоті, а вже після згортки високочастотного спостереження, що спрощує технічну реалізацію процедур компенсації, у тому числі при цифровій обробці.

Супутні задачі оцінювання неінформаційних параметрів взаємно неортогональних сигналів при ML-синтезі потребують SIC-технологій. Однак у реальних каналах зі змінними параметрами це процеси, повільні на довжині інформаційного тактового інтервалу, що полегшує розв'язання проблем точності оцінювання і самозбудження.

Можна очікувати, що асинхронізм QPSK-сигналів призведе до ускладнення алгоритму розділення-демодуляції приблизно вдвічі — на довжині інформаційного тактового інтервалу малопотужного сигналу треба буде компенсувати вплив потужного на двох його суміжних інтервалах, що перетинаються в часі з малопотужним. Однак завадостійкість алгоритму розділення-демодуляції взаємно неортогональних асинхронних QPSK-сигналів очікується не гіршою за завадостійкість алгоритму розділення-демодуляції синхронних QPSK-сигналів із таким самим ступенем неортогональності внаслідок так званої самокомпенсації.

Одержані результати можуть бути поширені на інші моделі адитивних сукупностей подібних чотирипозиційних сигналів зі смуго-ефективними неенергетичними видами модуляції – наприклад, OFDM зі QPSK-складовими на піднесівних.

#### ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Burachenko D. L., Yerokhin V. F. An Algorithm for the Separation Of Additive Nonorthogonal Synchronous Signals. *Telecommunications and Radio Engineering*. Jan.1986. Vol. 40-1, Issue: 1. Pp. 123–124.
2. Burachenko D. L., Erokhin V. F. Potential Noise-Immunity of a Digital Signal Demodulator With Structural Intermittent Interference Compensation. *Telecommunications and Radio Engineering*. Oct. 1989. Vol. 44, Issue: 10. Pp. 132–133.
3. Єрохін В. Ф. Демодуляція конфліктуєчих цифрових сигналів. Київ: ІК ім. В. М. Глушкова АН України – КВІУЗ, 1993. 133 с.
4. Verdu S. Multiuser detection. Publisher: Cambridge University Press. August, 1998. 462 p.
5. Michael L. Honig. Advances in Multiuser Detection. Publisher: Wiley-IEEE Press, 2009. 512 p.
6. Єрохін В. Ф. Випадковий множинний доступ при розв'язанні конфліктів на фізичному рівні: навч. посіб. / Київ: ІСЗЗІ НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2014. 296 с.
7. Єрохін В. Ф. Багатокористувацьке детектування: навч. посіб. / Київ: ІСЗЗІ НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017. 162 с.
8. Єрохін В. Ф., Радзівілов Г. Д., Коваленко О. О. Пошук шляхів редукції оптимальних алгоритмів розділення-демодуляції взаємно неортогональних цифрових сигналів. *Системи і технології зв'язку, інформатизації та кібербезпеки*. Київ: ВІТІ ім. Героїв Крут. № 8. С. 62–78. DOI: 10.58254/viti.8.2025.

Надійшла до редколегії 19.03.2026.

Схвалена до друку 22.05.2026.

Дата публікації 29.05.2026.