

УДК 621.3.019.3

д-р техн. наук, професор Креденцер Б. П. ORCID: 0000-0003-1920-2107 (ВІТІ ім. Героїв Крут)
Унтілова О. О. ORCID: 0009-0003-8756-1889 (ВІТІ ім. Героїв Крут)

МОДЕЛЬ НАДІЙНОСТІ СИСТЕМИ БЕЗПЕРЕРВНОГО ВИКОРИСТАННЯ ЗІ СТРУКТУРНОЮ НАДЛИШКОВІСТЮ З ПАРАЛЕЛЬНОЮ ВИТРАТОЮ СКЛАДОВИХ РЕЗЕРВНОГО ЧАСУ

Для обчислення нормального функціонування складних технічних систем, в тому числі автоматизованих систем управління, зв'язку, інформатизації тощо, в умовах зовнішніх впливів (відмов, перешкод) широко використовуються методи резервування: структурне, інформаційне, функціональне, навантажувальне та часове. Якщо перші чотири види резервування відомі давно, то результати дослідження надійності систем із часовою надмірністю з'явилися відносно нещодавно. Резерв часу являє собою системний параметр, визначений структурою побудови і особливостями функціонування (алгоритмом використання) систем.

Аналіз відомих робіт [1–7], які були виконані в цій предметній області, показує, що більшість наукових результатів отримано при використанні окремих видів резервування, хоча комплексне використання надмірності дозволяє частково компенсувати недоліки та посилити переваги кожного окремого виду. Проте такий комплексний підхід суттєво ускладнює отримання розрахункових співвідношень для показників надійності, придатних для практичного використання.

Метою даної роботи є побудова математичної моделі надійності складної технічної системи безперервного використання, для підвищення надійності функціонування якої передбачено спільне використання структурного, навантажувального і часового резервування, яке містить дві складові резерву часу: поповнювальна (t_D) та непоповнювальна (t_P). У даній моделі передбачений один із ймовірних алгоритмів взаємодії складових резервних часу: інтервали відновлення системи t_{B_i} , в тому числі і t_i , які не перевищують допустимий час t_D , включаються в сумарний час простою системи та призводять до зменшення непоповнювальної складової резерву t_P .

Варто зазначити, що облік трьох видів резервування в одній моделі надійності привів до помітного збільшення числа можливих станів досліджуваної системи. Для отримання більш простих розрахункових співвідношень для показників надійності використаний підхід, що базується на фазовому укрупненні станів [8; 9]. В результаті отримано відносно прості розрахункові співвідношення для вірогідності безвідмовного функціонування і середнього напрацювання до відмови системи. Проведена кількісна оцінка точності отриманих наближених формул підтвердила доцільність їх використання в інженерній практиці.

Ключові слова: надійність функціонування, структурна надлишковість, часове резервування, завантажений, полегшений, ненавантажений резерв.

B. Kredenzner, O. Untilova. Reliability Model of a continuously operating system with structural redundancy and parallel consumption of reserve time components

To assess the normal operation of complex technical systems, including automated control, communication, and information systems, under the influence of external faults (failures, interferences), various redundancy methods are widely used: structural, informational, functional, load-based, and temporal. While the first four types of redundancy have been known for a long time, research on the reliability of systems with temporal redundancy has emerged relatively recently. Time redundancy represents a system parameter determined by the system's structure and operational features (i.e., the algorithm of its use).

An analysis of the well-known studies [1–7] in this field shows that most scientific results have been obtained using individual types of redundancy, although integrated use of redundancy can partially compensate for the limitations and enhance the benefits of each separate type. However, such an integrated approach significantly complicates the derivation of analytical expressions for reliability indicators that are suitable for practical application.

The aim of this work is to develop a mathematical model for the reliability of a continuously operating complex technical system, in which structural, load-based, and temporal redundancy are jointly applied to improve operational reliability. The model includes two components of time reserve: replenishable (t_D) and non-replenishable (t_P). The model assumes one of the possible algorithms for the interaction of time reserve components: system recovery intervals t_{B_i} , including those not exceeding the permissible time t_D , are included in the total system downtime and lead to a reduction in the non-replenishable component t_P .

It is worth noting that accounting for three types of redundancy within a single reliability model led to a significant increase in the number of possible system states. To derive simpler analytical expressions for reliability indicators, an approach based on phase-state aggregation [8,9] was used. As a result, relatively simple analytical expressions for system reliability metrics—such as the probability of failure-free operation and the mean time to failure—

were obtained. A quantitative assessment of the accuracy of these approximate formulas confirmed their practical applicability in engineering contexts.

Keywords: operational reliability, structural redundancy, time-based redundancy, loaded reserve, reduced-load reserve, unloaded reserve.

Постановка завдання. Розглянемо систему, в якій передбачено спільне використання структурної, навантажувальної і часової (резерв часу комбінований) надлишковості. У цій системі об'єкт складається з n основних ($n \geq 1$) і m резервних ($m \geq 1$) ідентичних елементів, які можуть відмовляти, причому сумарна інтенсивність відмов залежить від числа непрацездатних елементів.

Позначимо через λ_k сумарну інтенсивність відмов елементів за умови, що в даний момент непрацездатні k елементів. Інтенсивність λ_k визначається числом основних і резервних елементів, а також інтенсивністю відмови окремого основного і резервного елементів. У разі змішаного резерву вважатимемо, що першочергово в системі m_n елементів знаходяться в навантаженому резерві, m_0 – у полегшеному, а інші $(m - m_n - m_0)$ – у ненавантаженому. При відмові одного з основних елементів він замінюється елементом із навантаженого резерву, елемент, що відмовив, навантаженого резерву замінюється елементом з полегшеного резерву, а елементи полегшеного резерву поповнюються з ненавантаженого резерву, тобто (1)

$$\lambda_k = \begin{cases} (n + m_n + \alpha m_0)\lambda, & 0 \leq k \leq m - m_n - m_0; \\ [n + m_n + (m - m_n - k)\alpha]\lambda, & m - m_n - m_0 < k \leq m - m_n; \\ (n + m - k)\lambda, & m - m_n < k \leq m; \end{cases} \quad (1)$$

де λ – інтенсивність відмов одного елементу в навантаженому стані;

α – коефіцієнт навантаження елементів полегшеного резерву ($0 < \alpha < 1$).

Відновлення елементів, що відмовили, здійснюється ремонтним органом, що включає l ремонтних бригад ($l \geq 1$). Час відновлення одного елементу – випадкова величина t_B з довільною функцією розподілу $F_B(t)$. Кожна бригада може одночасно ремонтувати тільки один елемент, що відмовив, і кожен елемент відновлюється лише однією з l бригад. Якщо всі бригади зайняті і відмовляє ще один елемент, то він стає в чергу на відновлення. Бригада, що закінчила відновлення одного з елементів, бере на ремонт перший із непрацездатних елементів, що стоять у черзі. Вважатимемо, що ремонт повністю відновлює початкові властивості елементу. Час підключення ненавантаженого резервного елементу замість основного, що відмовив, – випадкова величина t_{Π} із довільною функцією $F_{\Pi}(t)$, а допустимий час підключення (використаний в системі поповнювальний резерв часу) – випадкова величина t_D з довільною функцією розподілу $D(t)$.

Об'єкт виконує завдання тривалістю t_3 . Для виконання кожного завдання виділяється оперативний час t , що перевищує мінімально необхідний час t_3 на величину непоновлювального резерву t_P , тобто $t = t_3 + t_P$.

Відмова системи може виникнути в двох випадках: при відмові $(m + 1)$ -го елементу або при витраті складових резерву часу (t_D та t_P). Із цього слідує, що метод витрати резерву часу на відновлення елементів, що відмовили, здійснює істотний вплив на показники надійності системи.

Взаємодія джерел комбінованого резерву часу в системі може відбуватися відповідно до однієї з двох моделей. У моделі 1 інтервали часу відновлення t_{Bi} , у тому числі й t_i , що не перевищують допустимої величини t_D , включаються в сумарний час простою і призводять до зменшення непоновлювальної складової резерву часу t_P . Зрив функціонування відбувається у момент часу T_0 , коли яка-небудь зі складових ($t_P(x)$ або $t_D(x)$) стане рівною нулю. У моделі 2

інтервали часу відновлення t_{vi} , що не перевищують t_d , включаються в корисний час і не включаються в сумарний час простою. Витрата непоновлювальної складової t_p комбінованого резерву часу починається лише тоді, коли $t_{vi} > t_d$. Зрив функціонування виникає в момент T_0 , коли $t_p(x)$ стає рівним нулю. Вибір цих моделей зумовлений, по-перше, їх широким використанням на практиці, а по-друге, одержувані результати в цьому випадку дають нижню і верхню оцінки основних показників надійності системи з комбінованим резервом часу. В даній статті розглядається взаємодія джерел комбінованого резерву часу відповідно з моделлю 1 (паралельна витрата складових резервного часу).

Припустимо, що в початковий момент всі елементи працездатні. Тоді функціонування системи відбувається таким чином. Через деякий випадковий час після включення системи виникає відмова одного з основних або резервних елементів, що знаходиться в навантаженому або полегшеному режимах. При відмові резервного елемента відразу ж починається його ремонт, після закінчення якого він повертається в резерв. Якщо відмовив основний елемент, то у момент відмови починається підключення одного з резервних елементів, що знаходяться у навантаженому режимі. В силу прийнятих припущень вважаємо, що під час підключення система не змінює свого стану. У момент закінчення підключення ремонтна бригада приступає до відновлення працездатності елемента, що відмовив. Якщо під час ремонту виникає нова відмова, то у момент відмови починається чергове підключення (при відмові основного елемента) або відновлення (якщо відмовив резервний елемент і є вільна ремонтна бригада) і т. д. Після закінчення відновлення працездатності елемент повертається в резерв. Інтервали часу підключення включаються в сумарний час простою і призводять до зменшення непоновлювальної складової резерву часу t_p .

Система відмовляє в двох випадках: в момент, коли хоча б одна зі складових комбінованого резерву часу стане рівною нулю, і в момент відмови $(m + 1)$ -го елемента.

Сформулюємо початкові передумови і припущення, при яких розв'язується задача:

наробіток між відмовами окремого основного елемента розподілений за експоненціальним законом з параметром λ і не залежить від номера відмови;

час відновлення одного елемента t_v розподілений за експоненціальним законом із параметром μ ;

час підключення резервного елемента $t_{п}$ розподілений за експоненціальним законом із параметром $\gamma_{п}$;

перемикач вважається абсолютно надійним;

допустимий час перерви у функціонуванні – випадкова величина t_d з експоненціальним законом розподілу і параметром $\gamma_{п}$ або детермінована величина t_d ;

при відмові $(m + 1)$ -го елемента об'єкт вимикається і нові відмови не виникають; система відновлює свою роботу при закінченні ремонту одного з $(m + 1)$ непрацездатних елементів;

середня тривалість підключення і величина резерву часу значно менше середнього наробітку об'єкта між відмовами ($\bar{t}_{п} \ll 1/\lambda_k$, $t_d \ll 1/\lambda_k$) і середньої тривалості ремонту $\bar{t}_v$ ($\bar{t}_{п} \ll \bar{t}_v$, $t_d \ll \bar{t}_v$).

Для сформульованих умов необхідно визначити аналітичні вирази для показників надійності: ймовірність безвідмовного функціонування $P(t_3, t_p, t_d)$ і середній наробіток до відмови (до зриву функціонування) $T_0(t_p, t_d)$ даної резервованої системи.

Аналіз останніх публікацій. Дослідженню проблеми забезпечення надійності функціонування складних систем озброєння і військової техніки на основі використання різних видів надлишковості присвячено значну кількість наукових праць. Аналіз основних останніх публікацій у цій предметній галузі [1–7] дає змогу зробити висновок, що питанням комплексного використання декількох видів надлишковості для підвищення надійності присвячено відносно мало досліджень [5; 7]. Це пояснюється ускладненням отримання при

такому підході простих розрахункових співвідношень для показників надійності, зручних для практичного використання.

Зокрема, у роботі [5] побудована модель надійності системи епізодичного використання при спільному використанні комбінованого резерву часу, структурного та навантажувального резервування. Крім того, у цій моделі реалізовано специфічний алгоритм взаємодії поповнювальної і непоповнювальної складових резерву часу. Тому отримані в [5] результати (розрахункові співвідношення для основних показників) не можуть бути використані для оцінки надійності функціонування системи безперервного використання, що визначає актуальність тематики опублікованої статті та новизну отриманих у ній результатів. Але вищевказані роботи не встигають за швидким розвитком озброєння і військової техніки. Тому виникає наукове завдання створення наукової моделі надійності системи безперервного використання зі структурною надлишковістю з паралельною витратою складових резервного часу.

Метою статті є обґрунтування моделі надійності системи безперервного використання зі структурною надлишковістю з паралельною витратою складових резервного часу.

Виклад основного матеріалу

Процес функціонування системи можна описати однорідним марковським процесом із безперервним часом і кінцевим числом станів. Граф станів і переходів цього процесу представлений на рисунку 1, а, де зображено наступні стани:

$e_0 \div e_m$ – стани, в яких непрацездатні $0, 1, \dots, m$ резервних елементів;

$e_{m+1} \div e_{2m}$ – стани, в яких відбувається підключення резервного елементу після відмови основного за час, що не перевищує τ_d ;

$e_{2m} \div e_{3m}$ – стани, в яких відбувається підключення резервного елементу замість основного, що відмовив, після втрати резерву часу τ_d ;

e_{3m+1} – стан, в якому відбувається відновлення працездатності l елементів ($1 \leq l \leq m + 1$).

Слід зазначити, що після відмови $(m + 1)$ -го елементу система затримується в стані e_m на якийсь час τ_d . Проте через прийняті початкові умови цим часом затримки можна знехтувати. Таке припущення дозволяє спростити граф станів і переходів системи та призводить до незначної похибки.

Отримання точних розрахункових співвідношень для основних показників надійності в загальному випадку ($n \geq 1, m \geq 1$) є складним завданням, тому що введення різних видів надлишковості в систему істотно розширює фазовий простір станів випадкового процесу, що описує її поведінку в часі. При цьому для визначення основних показників надійності виникає необхідність рішення систем лінійних рівнянь великої розмірності з коефіцієнтами, які залежать від параметрів s і ω (параметрів у перетворенні Лапласа – Карсона) з подальшим оберненням одержаного перетворення Лапласа – Карсона. Навіть у найпростіших випадках, таких, наприклад, як дубльовані системи, розрахункові співвідношення виявляються дуже складними. Тому одержимо точні вирази лише для випадку одного резервного елементу ($n \geq 1, m = 1$), а для загального випадку ($n \geq 1, m \geq 1$) скористаємося алгоритмом укрупнення станів.

Граф станів і переходів системи при $m = 1$ та $n \geq 1$ представлено на рисунку 2.

Для вирішення завдання скористаємось відомими системами рівняння для визначення перетворення Лапласа – Карсона ймовірності безвідмовного функціонування $P_i(s, \omega)$ та перетворення Карсона середнього наробітку до відмови системи $\bar{T}_i(\omega)$, де s та ω – параметри в перетворенні Лапласа – Карсона; i – початковий стан системи, $i \in E_+$.

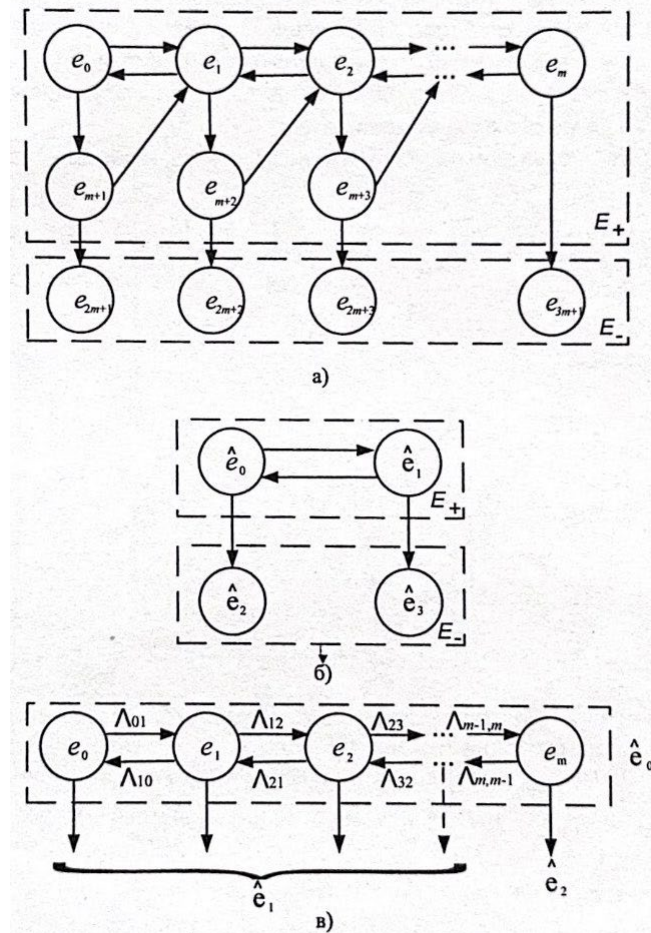


Рис. 1. Граф станів і переходів системи: *a* – початкової; *б* – після укрупнення; *в* – переходи всередині і виходи за межі укрупненої підмножини $\hat{e}_0$ (модель 1)

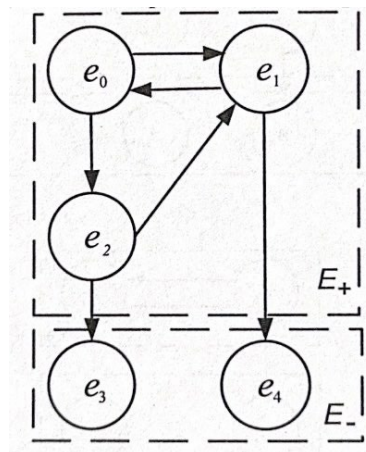


Рис. 2. Граф станів і переходів початкової системи при $m = 1$

Система рівнянь для $P_i(s, \omega)$ має вигляд (2):

$$\begin{aligned} P_i(s, \omega) &= 1 - F_i(s) + \sum_{j \in E_+} P_{ij}(s) P_j(s, \omega), \quad i \in E_+, \\ P_i(s, \omega) &= \sum_{j \in E_+} P_{ij}(\omega) P_j(s, \omega), \quad i \in E_+^*. \end{aligned} \quad (2)$$

де $F_i(s)$ – перетворення Лапласа – Карсона функція розподілу. $F_i(t)$ часу перебування системи в стані e_i , тобто (3)

$$F_i(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} F_i(t) dt; \quad (3)$$

$P_{ij}(s), P_j(\omega)$ – перетворення Лапласа – Карсона перехідної імовірності $P_{ij}(t)$ (4):

$$P_{ij}(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} P_{ij}(t) dt; P_j(\omega) = \omega \int_0^{\infty} e^{-\omega t} P_j(t) dt; \quad (4)$$

E_+^* – підмножина станів з E_+ , у яких об'єкт непрацездатний і відновлюється шляхом підключення резервних елементів або ремонту (при цьому відбувається витрачання обох складових резерву часу).

Запишемо тепер систему рівнянь для $\bar{T}_i(\omega)$ (5):

$$\begin{aligned} \bar{T}_i(\omega) &= a_i + \sum_{j \in E_+} p_{ij} \bar{T}_j(\omega), i \in E_+, \\ \bar{T}_i(\omega) &= \sum_{j \in E_+} P_{ij}(\omega) \bar{T}_j(\omega), i \in E_+^*, \end{aligned} \quad (5)$$

де a_i, p_{ij} – як і раніше, відповідно середні часи перебування в станах e_i і стаціонарна ймовірність переходу $e_i \rightarrow e_j$, при цьому $p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$.

Для даного окремого випадку ($m = 1, n \geq 1$) система рівнянь для $P_i(s, \omega)$ з урахуванням графа станів (рис. 5) матиме вигляд (6):

$$\begin{aligned} P_0(s, \omega) &= 1 - F_0(s) + P_{01}(s) P_1(s, \omega) + P_{02}(s) P_2(s, \omega); \\ P_1(s, \omega) &= 1 - F_1(s) + P_{10}(s) P_0(s, \omega); \\ P_2(s, \omega) &= P_{21}(s) P_1(s, \omega). \end{aligned} \quad (6)$$

Вирішуючи систему рівнянь (6) відносно $P_0(s, \omega)$, одержимо (7):

$$P_0(s, \omega) = \frac{1 - F_0(s) + (1 - F_1(s)) [P_{01}(s) + P_{02}(s) P_{21}(\omega)]}{1 - P_{10}(s) [P_{01}(s) + P_{02}(s) P_{21}(\omega)]} \quad (7)$$

Для визначення $\bar{T}_0(\omega)$ використовується наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} \bar{T}_0(\omega) = a_0 + p_{01} \bar{T}_1(\omega) + p_{02} \bar{T}_2(\omega); \\ \bar{T}_1(\omega) = a_1 + p_{10} \bar{T}_0(\omega); \\ \bar{T}_2(\omega) = P_{21}(\omega) \bar{T}_1(\omega). \end{cases}$$

Звідси впливає вираз (8):

$$\bar{T}_0(\omega) = \frac{a_0 + a_1(p_{01} + p_{02}P_{21}(\omega))}{1 - p_{10}(p_{01} + p_{02}P_{21}(\omega))}. \quad (8)$$

Використовуючи співвідношення (3) і (4), визначимо перетворення Лапласа – Карсона перехідних імовірностей і функцій розподілу, які входять до виразів (7) і (8), а також значення середнього часу перебування для випадку $D(t) = 1 - e^{-\gamma t}$, $F_{\Pi}(t) = 1 - e^{-\gamma_{\Pi} t}$:

$$\begin{aligned}
 P_{01}(s) &= \frac{\alpha\lambda}{(n+\alpha)\lambda+s}; P_{02}(s) = \frac{n\lambda}{(n+\alpha)\lambda+s}; P_{10}(s) = \frac{\omega}{n\lambda+\mu+s}; \\
 F_0(s) &= \frac{(n+\alpha)\lambda}{(n+\alpha)\lambda+s}; F_1(s) = \frac{n\lambda+\mu}{n\lambda+\mu+s}; F_2(s) = \frac{\gamma_{\Pi}+\gamma}{\gamma_{\Pi}+\gamma+\omega}; \\
 P_{21}(\omega) &= \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_{\Pi}+\gamma+\omega}; a_0 = \frac{1}{(n+\alpha)\lambda}; a_1 = \frac{1}{n\lambda+\mu}; a_2 = \frac{1}{\gamma_{\Pi}+\gamma}.
 \end{aligned}$$

Якщо непоповнювальний резерв часу – не випадкова величина $t_D = \text{const}$, то $P_{21}(\omega)$, $F_2(s)$ і a_2 слід визначати за формулами:

$$P_{21}(\omega) = \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_{\Pi}+\omega} (1 - qe^{-\omega t_D}); F_2(s) = \frac{1}{\gamma_{\Pi}+s} (\gamma_{\Pi} + sqe^{-st_D}); a_2 = \frac{1}{\gamma_{\Pi}} (1 - q),$$

де $q = P(t_{\Pi} > t_D)$.

Перейшовши від зображень по Карсону до оригіналів функцій за допомогою відомих методів [10], одержимо вирази для визначення показників надійності даної системи. Розрахункове співвідношення для $P(t_3, t_p, \tau_D)$ тут не наводиться, оскільки має громіздкий вигляд. Вирази для визначення середнього наробітку до відмови $\bar{T}_0(t_p, \tau_D)$ після відповідальних перетворень приводять до вигляду (9):

для випадку, коли τ_D – випадкова величина з функцією розподілу $D(t) = 1 - e^{-\gamma t}$,

$$\bar{T}_0(t_p, \tau_D) = \frac{1}{n\lambda B} [(n\lambda + \mu)A(e^{Bt_p} - 1) + B], \quad (9)$$

де $B = \mu A - \gamma_{\Pi} - \gamma$; $A = \frac{\gamma_{\Pi}}{(n+\alpha)\lambda+\mu}$;

для випадку, коли $(\tau_D = t_D)$ – не випадкова величина ($t_D = \text{const}$) (10),

$$\bar{T}_0(t_p, t_D) = n\lambda(A_i + \frac{n\lambda}{\mu})A_{i+1}, \quad (10)$$

де $A_i = \sum_{i=0}^{\lfloor t_p/t_D \rfloor} \left(\frac{\mu}{(n+\alpha)\lambda+\mu}\right)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} e^{-j\gamma_{\Pi}t_D} I(i, \gamma_{\Pi}(t_p - jt_D));$

$$A_{i+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor t_p/t_D \rfloor - 1} \left(\frac{\mu}{(n+\alpha)\lambda+\mu}\right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{i+1}{j} e^{-j\gamma_{\Pi}t_D} I(i, \gamma_{\Pi}(t_p - jt_D));$$

$$I(i, \gamma_{\Pi}(t_p - jt_D)) = 1 - \sum_{k=1}^i \frac{[\gamma_{\Pi}(t_p - jt_D)]^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\gamma_{\Pi}(t_p - jt_D)};$$

$\lfloor t_p / t_D \rfloor$ – позначає цілу частину числа.

Для вирішення задачі в загальному випадку ($n \geq 1, m \geq 1$) скористаємось алгоритмом укрупнення станів [8; 9].

Аналіз процесу функціонування і відповідного йому графа станів і переходів системи (рис. 1, а) дозволяє побудувати наступну процедуру укрупнення. Всі підмножини працездатних станів розіб'ємо на дві великі підмножини: $\hat{e}_0$ і $\hat{e}_1$ (рис. 1, б). Підмножина ергодичних станів $\hat{e}_0 \in E_+$ утворюється за рахунок об'єднання станів e_i , $i = \overline{0, m}$ неукрупненого марківського ланцюга $\xi(n)$ (рис. 1, а). Переходи всередині підмножини $\hat{e}_0$

зумовлені процесами відмов резервних і відновлення непрацездатних елементів (рис. 1, в). Підмножина станів $\hat{e}_1 \in E_+$ утворюється за рахунок неасимптотичного укрупнення станів e_i , $i = \overline{m+1, 2m}$, тобто вона об'єднує стани, в яких відбувається підключення резервного елементу замість основного, що відмовив. Область непрацездатних станів E_- укрупнюється також до двох станів $\hat{e}_2$ і $\hat{e}_3$. Укрупнений стан $\hat{e}_3$ утворюється за рахунок неасимптотичного об'єднання непрацездатних станів e_i , $i = \overline{2m+1, 3m}$, у яких відбувається підключення резервного елементу після витрачення допустимого часу τ_d . Укрупнений стан $\hat{e}_2$ складається з одного стану e_{3m+1} початкового графа (рис. 1, а), в якому відбувається відновлення працездатності l елементів ($1 \leq l \leq m+1$).

Можливість неасимптотичного об'єднання станів e_i , $i = \overline{m+1, 2m}$, у одну підмножину ґрунтується на результатах роботи [9]. Для випадку, що розглядається, виконується необхідна і достатня умова укрупнення процесу: ймовірність переходу між станами укрупненого процесу не залежить від конкретної пари станів початкового процесу, що визначають даний перехід. Значення цих ймовірностей приймаються за ймовірності переходу укрупненого процесу. Ця незалежність зумовлена природою переходів – підключенням резервного елементу замість основного, що відмовив. Ймовірність здійснення підключення за допустимий час τ_d або перевищення цього часу визначається тільки співвідношенням часу підключення t_p і допустимого часу τ_d (при заданих законах розподілу) і не залежить від конкретних станів укрупнених підмножин.

Для укрупненого графа станів (рис. 1, б) одержимо систему рівнянь для визначення перетворень Лапласа – Карсона ймовірності безвідмовного функціонування і середнього наробітку до відмови.

Використовуючи загальний вираз (2), одержимо систему рівнянь для визначення $P_i(s, \omega)$, $i \in E_+$ (11):

$$\begin{cases} P_0(s, \omega) = 1 - F_0(s) + P_{01}(s)P_1(s, \omega); \\ P_1(s, \omega) = P_{10}(\omega)P_0(s, \omega), \end{cases} \quad (11)$$

звідти знаходимо (12)

$$P_0(s, \omega) = \frac{1 - F_0(s)}{1 - P_{01}(s)P_{10}(\omega)} \quad (12)$$

Для визначення $\bar{T}_i(\omega)$ використовується наступна система рівнянь:

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(\omega) &= a_0 + p_{01}\bar{T}_1(\omega); \\ \bar{T}_1(\omega) &= P_{10}(\omega)\bar{T}_0(\omega), \end{aligned}$$

вирішуючи яку відносно $\bar{T}_0(\omega)$, одержуємо (13):

$$\bar{T}_0(\omega) = a_0 / (1 - p_{01}P_{10}(\omega)). \quad (13)$$

Використовуючи співвідношення (3) та (4), визначимо перетворення Лапласа – Карсона перехідної ймовірності і функцій розподілу часу перебування, що входять до виразів (12) та (13), для випадку $D(t) = 1 - e^{-\gamma t}$, $F_{\Pi}(t) = 1 - e^{-\gamma_{\Pi} t}$:

$$P_{01}(s) = q_{01}/(s + \Lambda_0); \quad F_0(s) = \Lambda_0/(s + \Lambda_0);$$

$$P_{10}(\omega) = \gamma_{\Pi}/(\gamma_{\Pi} + \gamma + \omega); \quad a_0 = 1/\Lambda_0; \quad a_1 = 1/(\gamma_{\Pi} + \gamma),$$

де q_{01} – укрупнена інтенсивність переходу зі стану $\hat{e}_0$ в $\hat{e}_1$;

Λ_0 – укрупнена інтенсивність виходу зі стану $\hat{e}_0$.

Якщо непоповнювальний резерв часу – не випадкова величина $t_D = \text{const}$, то $P_{10}(\omega)$ і a_1 слід визначати за формулами:

$$P_{10}(\omega) = \frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma_{\Pi} + \omega} (1 - e^{-\omega t_D}); \quad a_1 = \frac{1}{\gamma_{\Pi}} (1 - q).$$

Імовірність p_{ij} визначають шляхом граничного переходу у відповідних виразах для $P_{ij}(s)$ і $P_{ij}(\omega)$; $i, j \in E_+$, тобто

$$P_{ij} = \lim_{s \rightarrow 0} P_{ij}(s); \quad P_{ij} = \lim_{\omega \rightarrow 0} P_{ij}(\omega).$$

Застосовуючи відомі методи обернення до виразів для перетворення Лапласа – Карсона (формули (12) і (13)) [10], одержуємо розрахункові співвідношення для визначення основних показників надійності даних систем:

для випадку, коли τ_D – випадкова величина, $(D(t) = 1 - e^{-\gamma t})$ (14), (15):

$$P(t_3, t_p, \tau_D) = e^{-\Lambda_0 t_3} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(q_{01} \gamma_{\Pi} t_3)^i}{i! (\gamma_{\Pi} + \gamma)^i} \left\{ 1 - e^{-(\gamma_{\Pi} + \gamma) t_p} \sum_{j=1}^i \frac{[t_p (\gamma_{\Pi} + \gamma)]^{j-1}}{(j-1)!} \right\}; \quad (14)$$

$$\overline{T}_0(t_p, \tau_D) = \frac{1}{\Lambda_0 [(\gamma_{\Pi} + \gamma) \Lambda_0 - q_{01} \gamma_{\Pi}]} \left\{ (\gamma_{\Pi} + \gamma) \Lambda_0 - q_{01} \gamma_{\Pi} e^{-\frac{[(\gamma_{\Pi} + \gamma) \Lambda_0 - q_{01} \gamma_{\Pi}] t_p}{\Lambda_0}} \right\}; \quad (15)$$

для випадку, коли t_D – не випадкова величина ($t_D = \text{const}$) (16), (17),

$$P(t_3, t_p, t_D) = e^{-\Lambda_0 t_3} \sum_{i=0}^{\lfloor t_p/t_3 \rfloor} (q_{01} t_3)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{e^{-j \gamma_{\Pi} t_D}}{j! (i-j)!} I(i, \gamma_{\Pi} (t_p - j t_D)); \quad (16)$$

$$\overline{T}_0(t_p, t_D) = \frac{1}{\Lambda_0} \sum_{i=0}^{\lfloor t_p/t_D \rfloor} \left(\frac{q_{01}}{\Lambda_0} \right)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j C_i^j e^{-j \gamma_{\Pi} t_D} I(i, \gamma_{\Pi} (t_p - j t_D)), \quad (17)$$

$$\text{де } I(i, \gamma_{\Pi} (t_p - j t_D)) = 1 - \sum_{k=1}^i \frac{[\gamma_{\Pi} (t_p - j t_D)]^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\gamma_{\Pi} (t_p - j t_D)}.$$

Використовуючи загальний підхід і розрахункові співвідношення, наведені в [8], визначимо укрупнення інтенсивності переходів q_{01} та Λ_0 (18):

$$q_{01} = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \rho_i^{(0)} b_{i1}}{\sum_{i=0}^m \rho_i^{(0)} a_i}; \quad \Lambda_0 = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \rho_i^{(0)} b_{i1} + \rho_m^{(0)} b_{m2}}{\sum_{i=0}^m \rho_i^{(0)} a_i}, \quad (18)$$

де a_i – середній час перебування в i -му стані $i \in \hat{e}_0$;

$\rho_i^{(0)}$ – стаціонарна ймовірність перебування незбуреного вкладеного марківського ланцюга $\xi(n)$ у станах підмножини $\hat{e}_0$;

b_{ij} – елементи матриці збурень, $i \in \hat{e}_0, j \in \bar{e}_0$.

Таким чином, визначення значень параметрів q_0 і Λ_0 зводиться до оцінки стаціонарної ймовірності $\rho_i^{(0)}$, середнього часу перебування a_i і елементів матриці збурень b_{ij} , $i \in \hat{e}_0, j \in \bar{e}_0$.

Для підмножини ергодичних станів $\bar{e}_0$, переходи всередині якого утворюють процес загибелі і розмноження, стаціонарна ймовірність визначається за формулою (19):

$$\rho_i^{(0)} = \frac{\theta_i}{\sum_{s=0}^m \theta_s}, \quad i \in \hat{e}_0, \quad i = \overline{0, m}, \quad (19)$$

де $\theta_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}$, $i = \overline{1, m}$, $\theta_0 = 1$; λ_i – визначається (20) з виразу (1);

$$\mu_i = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ i\mu, & i \leq l; \\ l\mu, & i > l. \end{cases} \quad (20)$$

Використовуючи початковий граф станів (рис. 1, а), визначимо середній час перебування системи в i -му стані (21):

$$a_i = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i}, \quad i = \overline{0, m}. \quad (21)$$

З представлення матриці ймовірності переходів $\mathbf{P}$ реальної системи у вигляді $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{B}$ [8] випливає, що елементи матриці збурень b_{ij} , $i \in \hat{e}_0, j \in \bar{e}_0$, можуть бути визначені як:

$$b_{ij} = p_{ij}^{(0)} - p_{ij}.$$

Отже, для оцінки елементів матриці збурень $\mathbf{B}$ необхідно набути значення ймовірності переходів ідеальної і реальної систем. Використовуючи відомий вираз для визначення ймовірності переходів p_{ij} і граф станів (рис. 1, в), отримаємо:

для ідеальної системи (за відсутності збурення за рахунок відмов основних елементів) (22)

$$\begin{cases} p_{i,i+1}^{(0)} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, & i = \overline{0, m-1}; \\ p_{i,i-1}^{(0)} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, & i = \overline{1, m}; \end{cases} \quad (22)$$

для реальної системи (з урахуванням збурень) (23), (24)

$$\begin{cases} p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_i^* + \mu_i}, & i = \overline{0, m-1}; \\ p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i^* + \mu_i}, & i = \overline{1, m}; \end{cases} \quad (23)$$

де

$$\lambda_i^* = \lambda_i - n\lambda. \quad (24)$$

Звідси можна знайти вирази для елементів матриці збурень (25), що входять у формули (18):

$$\begin{cases} b_{i1} = \frac{n\lambda}{\lambda_i + \mu_i}, i = \overline{0, m-1}; \\ b_{m2} = \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu_m}. \end{cases} \quad (25)$$

Розрахунок показників надійності здійснюється в наступній послідовності:

- 1) обчислення значень елементів матриці збурень b_{ij} і b_{m2} , що входять у формули для q_{01} і Λ_0 (25);
- 2) визначення стаціонарної імовірності $\rho^{(0)}$ перебування незбуреного марківського ланцюга $\xi(n)$ у станах підмножини $\hat{e}_0$ (формули (1), (19), (20));
- 3) розрахунок середніх годин перебування системи в станах $e_i, i = \overline{0, m}$ (21);
- 4) обчислення укрупнених інтенсивностей переходів q_{01} і Λ_0 (18);
- 5) розрахунок імовірності безвідмовного функціонування $P(t_3, t_p, t_d), P(t_3, t_p, t_d)$ (формули (14) і (16)) і середнього наробітку до відмови (зриву функціонування) $\bar{T}_0(t_p, t_d), \bar{T}_0(t_p, t_d)$ (формули (15), (17)).

Таким чином, з використанням алгоритму укрупнення одержано наближені розрахункові співвідношення для основних показників надійності системи безперервного використання зі структурними, навантажувальними і комбінованими часовими резервами, в якій інтервали часу відновлення включаються в сумарний час простою.

роведено оцінку похибки знайдених наближених аналітичних співвідношень для показників надійності розглянутої системи, використовуючи підхід, який дозволяє оцінити значення похибки зверху, тобто для найгіршого випадку. Таким випадком для алгоритму асимптотичного укрупнення є система з одним резервним елементом ($n \geq 1, m = 1$). Це пояснюється тим, що при $m = 1$ матриця збурень має максимальні елементи, а отже, алгоритм асимптотичного укрупнення – мінімальну точність [8]. Таким чином, оцінку похибки розроблених аналітичних моделей будемо проводити шляхом порівняння результатів розрахунків для випадку $m = 1$ за точною (10) і наближеною (17) формулами.

Результати оцінки відносної похибки $\delta_{\bar{T}_0}$ наведено на рисунку 3, де величина похибки $\delta_{\bar{T}_0}$ визначається за формулою:

$$\delta_{\bar{T}_0} = \frac{|\bar{T}_0^{(T)}(t_p, t_d) - \bar{T}_0^{(H)}(t_p, t_d)|}{\bar{T}_0^{(T)}(t_p, t_d)} \times 100\%,$$

де $\bar{T}_0^{(T)}(t_p, t_d), \bar{T}_0^{(H)}(t_p, t_d)$ – відповідно точна і наближена формули середнього наробітку до відмови.

Аналіз рисунка 3 дозволяє зробити **наступні висновки**. Одержані в статті розрахункові співвідношення дають можливість визначати основні показники надійності даних системи з достатньою для інженерної практики точністю ($\delta_{\bar{T}_0} < 10\text{--}12\%$) у широкому діапазоні робочих умов. Зі збільшенням кількості резервних елементів m величина похибки буде зменшуватись. Найбільш суттєвий вплив на точність результатів робить величина відношення μ/λ . Застосування розроблених аналітичних моделей є допустимим для систем при $\mu/\lambda \geq 10$, а при $\rho = t_p/t_d > 5$ – при $\mu/\lambda \geq 10^2$ або $m > 1$.

Напрямок подальшої роботи є проведення дослідження отриманих формул для показників надійності для кількісної оцінки ефективності різних методів резервування і обґрунтування рекомендацій щодо підвищення надійності функціонування розглянутої системи.

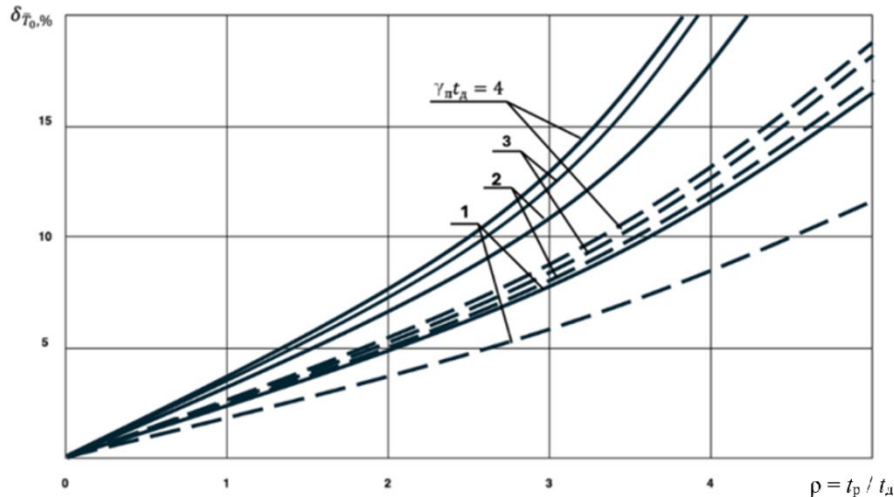


Рис. 3. Графіки залежності відносної похибки відношення між складовими резервами часу $\rho = t_p / t_d$ при різних значеннях $\gamma_n t_d$ та $n = m = \alpha = l = 1$; — $\mu / \lambda = 10$, - - - $\mu / \lambda = 20$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИЙ ДЖЕРЕЛ

1. Креденцер Б. П., Могилевич Д. І., Кононова І. В., Пантаєв Ю. Оцінка надійності телекомунікаційного обладнання мережі спеціального призначення з урахуванням збоїв // Збірник наукових праць ВІТІ. 2019. Вип. 4. С. 44–48.
2. Mogylevych D., Kononova I., Kredentser B., Oksiuk O. Reliability of Redundant Telecommunications Equipment Advanced Model Considering Failures and Refusals of Structure Elements. IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT) 2019. DOI: <https://doi.org/10.1109/ATIT49449.2019.9030502>. ISBN: 978-1-7281-6144-0 e-ISBN: 978-1-7281-6144-0. P. 238–243.
3. Mogylevych D., Kononova I., Kredentser B., Karadschow I. Comprehensive Reliability Assessment Technique of Telecommunication Networks Equipment with Reducible Structure // Вісник НТУ КПП. Серія – Радіотехніка Радіоапаратобудування. 2020. Вип. 85. DOI: <https://doi.org/10.20535/RADAP.2020.85.39-47>. С. 39–47.
4. Kredentser Borys, Mogylevych Dmytro, Kononova Iryna, Mohylevych Vadym. Analytical Model with Interruption of Service of Short-term Objects with Temporary Reservation // Information Technology and Interactions. P. 295–301.
5. Креденцер Б. П., Сидоров Л. А., Бутянов А. Н. Применение операции укрупнения при оценке надежности одного класса резервируемых сетей // Кибернетика. 1990. № 2. С. 26–29.
6. Креденцер Б. П. Техническое обслуживание и надежность сетей с временным резервированием. Киев: Феникс, 2016. 384 с.
7. Креденцер Б. П., Могилевич Д. І., Кононова І. В. Оцінка виграшу в надійності при комплексному використанні надлишковості в об'єктах телекомунікацій // Збірник наукових праць ВІТІ. К., 2017. Вип. 2. С. 48–57.
8. Королюк В. С, Турбин А. Ф. Фазовое укрупнение сетевых систем. К.: Вища школа, 1978. 112 с.
9. Захарян А. М. Об ухудшении состояния микросхем и микропроцессорных приборов и способах их укрепления // Анализ стохастических процессов в приборостроении // Кибернетика. 1991. № 4. С. 56–65.
10. Дей Г. Руководство к практическому решению задач Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1971. 288 с.